Fundamentale Prinzipien der Kombinatorik und elementare Abzählkoeffizienten

Wolfram Koepf

Die abzählende Kombinatorik beschäftigt sich vor allem mit

- der Auswahl einer Teilmenge, die man häufig eine Stichprobe nennt (aus Wahrscheinlichkeitsrechung und Statistik stammender Begriff),
- dem Anordnen von Mengen.

Hierbei werden die folgenden elementaren Abzählprinzipien verwendet:

- **Summenregel**: *Zerlegt* man eine Menge M in *disjunkte* Teilmengen
$$M = \bigcup_{k=1}^{n} M_k \ ,$$
so gilt
$$|M| = \sum_{k=1}^{n} |M_k| \ .$$
Beispiele: Jeder weiß, was eine Teilmenge ist. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen (kurz: k-Teilmengen) einer n-Menge sei $\binom{n}{k}$. **Beispielrechungen.** Wir nennen $\binom{n}{k}$ den *Binomialkoeffizienten*. Noch haben wir allerdings keine *Rechenvorschrift* zur Bestimmung dieser Zahlen.

  Die Potenzmenge $\mathcal{P}(N)$ einer n-Menge N kann man zerlegen (*klassifizieren*) nach der Anzahl der Elemente der entsprechenden Teilmengen von N:
$$\mathcal{P}(N) = \bigcup_{k=0}^{n} \{A \subset N \mid |A| = k\} = \bigcup_{k=0}^{n} P_k \ .$$
P_k ist also die Menge der k-Teilmengen von N, folglich gilt $|P_k| = \binom{n}{k}$. Also folgt
$$|\mathcal{P}(N)| = \sum_{k=0}^{n} |P_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ .$$
Andererseits ist $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$ (Beweis folgt demnächst mit der Gleichheitsregel). Also ist
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ . \tag{1}$$
Dies nennen wir einen *kombinatorischen Beweis* von (1).

  Ein weiteres Beispiel einer derartigen Klassifizierung ist die Aufteilung der k-Teilmengen P_k von N in diejenigen Teilmengen, welche ein gegebenes $a \in N$ enthalten und diejenigen, welche a nicht enthalten:
$$P_k = \{A \in P_k \mid a \in A\} \cup \{A \in P_k \mid a \notin A\} \ .$$

Hieraus folgt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

die berühmte Rekursion der Binomialkoeffizienten, welche das Pascalsche Dreieck erzeugt.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$									

Wo sehen Sie die Dreieckszahlen? Wir werden später einige weitere interessante Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks kennenlernen.

- **Produktregel**: Sei

  $$M = \bigotimes_{k=1}^{n} M_k$$

  ein Mengenprodukt, so ist

  $$|M| = \prod_{k=1}^{n} |M_k| \ .$$

  Dies kann man auch so formulieren: Ein Prozeß laufe in n voneinander unabhängigen Schritten ab. Gibt es für den k-ten Schritt n_k Möglichkeiten, dann kann der ganze Prozeß auf $\prod_{k=1}^{n} n_k$ Arten ablaufen. **Beispielrechungen.**

  Beispiele: Sei $W = \{0,1\}^n$. Dann ist $|W| = 2^n$. Mit anderen Worten: Es gibt 2^n verschiedene $0,1$-Folgen der Länge n. Solche Folgen nennen wir auch *Wörter* der Länge n über dem *Alphabet* $\{0,1\}$.

  Eine *Permutation* einer n-Menge N ist ein Wort der Länge n über dem Alphabet N, bei dem jedes Element genau einmal auftritt. Wieviele Permutationen von N gibt es? Es gibt n Möglichkeiten, den ersten Buchstaben zu wählen; dann bleiben $n-1$ Möglichkeiten, den zweiten Buchstaben zu wählen, usw. Mit Induktion erhalten wir also $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$ viele Permutationen von N.

- **Gleichheitsregel**: Existiert zwischen zwei Mengen M und N eine Bijektion, so gilt $|M| = |N|$.

  Beispiel: Wir geben eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(N)$ und $W = \{0,1\}^n$ an. Hierzu sei o. B. d. A. $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Das Element $A \in \mathcal{P}(N)$ erzeugt in eindeutiger Weise das Wort $a = a_1 a_2 \ldots a_n \in W$ mit

  $$a_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } k \in A \\ 0 & \text{falls } k \notin A \end{cases} .$$

Umgekehrt kann aus dem Wort $a = a_1a_2 \dots a_n \in W$ sofort auf die zugehörige Teilmenge $A \in \mathcal{P}(N)$ geschlossen werden:

$$A = \{k \in N \mid a_k = 1\} \ .$$

Also ist $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$.

Wir kommen nun zu weiteren Abzählaufgaben. Wir teilen die Fragestellungen des elementaren Abzählens in verschiedene Grundaufgaben ein, welche wir wiederum in verschiedene Modelle kleiden.

Mit K und N bezeichnen wir immer Mengen mit $k = |K|$ und $n = |N|$ Elementen, ggf. $K = \{1, \dots, k\}$ und $N = \{1, \dots, n\}$.

Grundaufgabe 1:

(A) Urnenmodell: Ziehen mit Zurücklegen: In einer Urne sind n durchnumerierte Kugeln (unterscheidbar!). Man ziehe zufällig aus der Urne eine Kugel und lege sie wieder zurück. Dies werde k-mal wiederholt. Wie viele solche Möglichkeiten gibt es?

Antwort: Es gibt n^k viele Möglichkeiten (Produktregel).

Eine andere Einkleidung ist gegeben durch

(B) duales Urnenmodell: Gegeben seien k unterscheidbare Kugeln und n durchnumerierte Urnen. Die Kugeln werden auf die Urnen verteilt. Wie viele mögliche Verteilungen gibt es?

(C) Abbildungsmodell: Wie viele Abbildungen $f : K \to N$ gibt es?

Antwort: $|\mathrm{Abb}(K, N)| = n^k$.

Der Zusammenhang zu (B): Die Abbildung f verteilt die Kugeln auf die Urnen! M.a.W.: die Kugeln sind die Urbilder und die Urnen sind die Bilder der Abbildung f.

(D) Wörtermodell: Ein Alphabet N mit n verschiedenen Buchstaben sei gegeben. Wie viele Wörter der Länge k gibt es?

Hier sind die Nummern der Buchstaben die Urbilder und die Buchstaben selbst die Bilder.

Grundaufgabe 2:

(A) Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen: In einer Urne sind n durchnumerierte Kugeln. Man ziehe zufällig aus der Urne eine Kugel und lege sie *nicht* wieder zurück. Dies werde k-mal wiederholt. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

Antwort: Es gibt

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = n^{\underline{k}}$$

viele Möglichkeiten (Produktregel). $n^{\underline{k}}$ heißen *fallende Faktorielle.*

(B) duales Urnenmodell: Gegeben seien k unterscheidbare Kugeln und n durchnumerierte Urnen. Die Kugeln werden so auf die Urnen verteilt, daß in keiner Urne mehr als eine Kugel landet. Wie viele solche Verteilungen gibt es?

(C) Abbildungsmodell: Wie viele *injektiven* Abbildungen $f : K \to N$ gibt es?

Antwort: $|\mathrm{Inj}(K, N)| = n^{\underline{k}}$.

(D) Wörtermodell: Ein Alphabet N mit n verschiedenen Buchstaben sei gegeben. Wie viele Wörter der Länge k gibt es, bei denen jeder Buchstabe höchstens einmal auftritt?

Spezieller Fall: $k = n$. Dann handelt es sich um bijektive Abbildungen $f : N \to N$ oder um Wörter aus n verschiedenen Buchstaben, also um *Permutationen*. Es gibt folglich $n^{\underline{n}} = n!$ Permutationen einer n-Menge.

Grundaufgabe 3:

(A) Urnenmodell: Ziehen in einem Griff: In einer Urne sind n durchnumerierte Kugeln. Man ziehe *in einem Griff* zufällig aus der Urne k Kugeln. Wie viele solche Ziehungen gibt es?

Antwort: Es gibt offenbar genau so viele solche Ziehungen, wie es k-Teilmengen einer n-Menge gibt, also $\binom{n}{k}$. Auf der anderen Seite entsprechen jeder derartigen Ziehung genau $k!$ Ziehungen (Anzahl der Permutationen von K) der Grundaufgabe 2. Also ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} .$$

(B) duales Urnenmodell: Gegeben seien k *nicht* unterscheidbare Kugeln und n durchnumerierte Urnen. Die Kugeln werden so auf die Urnen verteilt, daß in keiner Urne mehr als eine Kugel landet. Wie viele solche Verteilungen gibt es?

(C) Abbildungsmodell: Wie viele *streng monotone* Abbildungen $f : K \to N$ gibt es?

(D) Wörtermodell: Ein Alphabet N mit n verschiedenen angeordneten Buchstaben sei gegeben. Wie viele Wörter der Länge k gibt es, deren Buchstaben *sortiert* sind und jeder Buchstabe nur einmal auftritt?

Grundaufgabe 4:

(A) Urnenmodell: Ziehen ohne Notieren der Reihenfolge: In einer Urne sind n durchnumerierte Kugeln. Man ziehe zufällig aus der Urne eine Kugel und lege sie wieder zurück. Dies werde k-mal wiederholt. Am Ende sortiert man die Resultate („vergißt" also die Reihenfolge, in der sie gezogen wurden). Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Antwort: Es gibt $\binom{n+k-1}{k}$ solcher ungeordneter Stichproben mit Zurücklegen. (ohne Beweis)

(B) duales Urnenmodell: Gegeben seien k nicht unterscheidbare Kugeln, die auf n numerierte Urnen verteilt werden. Wie viele solche Verteilungen gibt es?

Antwort: Dies geht auf $\binom{n+k-1}{k}$ Arten.

(C) Abbildungsmodell: Wie viele *monotone* Abbildungen $f : K \to N$ gibt es?

Antwort: $|\mathrm{Mon}(K, N)| = \binom{n+k-1}{k}$.

(D) Wörtermodell: Ein Alphabet N mit n verschiedenen angeordneten Buchstaben sei gegeben. Wie viele Wörter der Länge k gibt es, deren Buchstaben sortiert sind?

Schließlich wollen wir die Betrachtungen durch folgende Fragestellung abrunden.

Wir bestimmen die Anzahl der k-stelligen Wörter aus dem Alphabet N, in denen das Zeichen j genau k_j mal vorkommt. Es ist also eine Liste $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ gegeben mit

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k \; .$$

Wir bezeichnen diese Anzahl als $M_k(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Als Sonderfall haben wir für $n = k$

$$M_k(1, 1, \ldots, 1) = k! \; ,$$

die Anzahl der Permutationen einer n-Menge. Man stelle sich zunächst die gleichen Zeichen als unterscheidbar vor. Es gibt in unserem Wort k_n mal das Zeichen n. Also ist

$$k_n! \, M_k(k_1, k_2, \ldots, k_n) = M_k(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, 1, 1, \ldots, 1) \; ,$$

wobei am Ende k_n Einsen stehen. Induktiv erhält man

$$k_1! \, k_2! \cdots k_n! \, M_k(k_1, k_2, \ldots, k_n) = M_k(1, 1, \ldots, 1) = k! \; ,$$

also

$$M_k(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{k!}{k_1! \, k_2! \cdots k_n!} \; .$$

$M_k(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ nennt man den *Multinomialkoeffizienten*, welcher eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten darstellt:

$$M_2(k_1, k_2) = \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! \, k_2!} = \binom{k_1 + k_2}{k_1} = \binom{k}{k_1} \; .$$

Daher verwendet man auch die Schreibweise

$$M_k(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} \; .$$

Manchmal, insbesondere auch in Nachschlagwerken, wird in der Kombinatorik folgendermaßen unterschieden:

- **Permutationen:** Sind n verschiedene Elemente gegeben, so nennt man irgendeine Anordnung *Permutation*.

- **Variationen:** Sind n verschiedene Elemente und k verschiedene Plätze gegeben, so nennt man irgendeine Anordnung auf den Plätzen (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) *Variation*.

- **Kombinationen:** Werden k aus n verschiedenen Elemente (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) ausgewählt, spricht man von einer *Kombination*.

Es gilt

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Anzahl verschiedener Permutationen	$P_n = n!$	$P_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$
Anzahl verschiedener Variationen	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$	$\overline{V}_n^k = n^k$
Anzahl verschiedener Kombinationen	$C_n^k = \binom{n}{k}$	$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Wie bereits gesehen, erhält man aus der Rekursion

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

das *Pascalsche Dreieck* für $\binom{n}{k}$:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$									

Dieses enthält viele interessante Beziehungen.

Wir summieren zuerst zeilenweise, d.h. bei festem n. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ . \tag{2}$$

Hierfür hatten wir bereits einen kombinatorischen Beweis gegeben.

Wir betrachten als nächstes eine Spaltensumme bis zur Zeile n. Es gilt

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \ .$$

Für $n = 0$ ist dies korrekt, und Induktion liefert:

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{k} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1} \ ,$$

wobei wir (2) benutzt haben.

Betrachten wir die Diagonalen $n = m + k$. Dies liefert

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \ .$$

Wieder ist die Aussage für $n = 0$ richtig, und wir bekommen

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+2}{n+1}.$$

Der Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}$$

läßt sich folgendermaßen kombinatorisch beweisen: Wie oft kommt der Summand $x^k \, y^{n-k}$ beim Ausmultiplizieren der linken Seite vor? Man erhält diesen Summanden, wenn man aus k Klammern x und aus $n-k$ Klammern y auswählt. Hierfür gibt es $\binom{n}{k}$ viele Möglichkeiten.