Modellierung des Annuitätenkredits

Wir haben die Größen

- A: Annuität;
- T_k: Tilgung zum k-ten Zahlungszeitpunkt;
- Z_k: Zins zum k-ten Zahlungszeitpunkt;
- R_k: Restschuld nach dem k-ten Zahlungszeitpunkt;
- K: Kreditsumme;
- $i = p/100$: Zinssatz pro Zahlungsperiode
- n: Abzahldauer = Anzahl der Jahre
- $q = 1 + i$: Aufzinsfaktor.

Zunächst berechnen wir die Formel für die Annuität mit Hilfe einer Rekursionsgleichung für T_k, also als *dynamisches System* (k ist die diskrete Zeitvariable) der Tilgungsentwicklung.

Setzen wir bei den Formeln

$$\begin{array}{rcl} A & = & T_1 + Z_1 = T_1 + Ki \\ A & = & T_2 + Z_2 = T_2 + (K - T_1)i \\ A & = & T_3 + Z_3 = T_3 + (K - T_1 - T_2)i \\ \vdots & = & \vdots \\ A & = & T_k + Z_k = T_k + (K - T_1 - T_2 - \cdots - T_{k-1})i \\ A & = & T_{k+1} + Z_{k+1} = T_{k+1} + (K - T_1 - T_2 - \cdots - T_{k-1} - T_k)i \end{array}$$

die letzten beiden Gleichungen gleich, so erhalten wir

$$T_{k+1} = T_k\, q \tag{1}$$

und damit (durch explizites Lösen dieser linearen und homogenen Differenzengleichung erster Ordnung!)

$$T_k = T_1 q^{k-1} \; . \tag{2}$$

Die erste Gleichung oben zeigt aber, daß der Anfangswert gegeben ist durch

$$T_1 = A - Ki \; . \tag{3}$$

Um nun die Annuität A zu bestimmen, verwendet man die Tatsache, daß die Gesamttilgung gleich dem erhaltenen Kredit K ist:

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \sum_{j=1}^{n} T_j = K \; .$$

Wenn wir die kumulierte Tilgungssumme für beliebiges k betrachten, finden wir auch eine Formel für die Restschuld.

Die geometrische Reihe liefert nämlich

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_k = \sum_{j=1}^{k} T_j = \sum_{j=1}^{k} T_1 q^{j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} T_1 q^j = T_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} \ ,$$

und damit gilt für die Restschuld

$$R_k = K - (T_1 + T_2 + \cdots + T_k) = K - T_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} \ .$$

Setzen wir den Anfangswert T_1 ein, bekommen wir schließlich

$$R_k = K - T_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} = K - (A - Ki) \frac{q^k - 1}{q - 1} = K q^k - A \frac{q^k - 1}{q - 1} \ .$$

Die Annuität ergibt sich, wie schon erwähnt, aus der Gleichung

$$R_n = 0 \ ,$$

und Auflösen nach A ergibt

$$A = K q^n \frac{q - 1}{q^n - 1} \ . \tag{4}$$

Die vorgeführte Methode zur Berechnung der Annuität hat uns unter anderem als *Modell* für die ganze Kreditabwicklung die *Rekursions-* bzw. *Differenzengleichung* für die dynamische Entwicklung der Tilgungsraten T_k geliefert.

Einen Tilgungsplan erhält man nun, indem man zunächst, gemäß (4) die Annuität ausrechnet, dann gemäß (3) die erste Tilgungsrate. Schließlich erhält man mit (2) sukzessive die Tilgungen T_k. Die k-te Zinszahlung Z_k ergibt sich zu

$$Z_k = A - T_k \ .$$