Übungsblatt 7

L20: A und X seien $n \times n$-Matrizen, X sei regulär, $B = X \cdot A \cdot X^{-1}$. Ferner sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} = X \cdot \vec{v}$. Überprüfen Sie: $B \cdot \vec{w} = X \cdot (A \cdot \vec{v})$.
Zeigen Sie: Ist $\vec{v}$ eine Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann ist $\vec{w}$ ein Eigenvektor von B zum selben Eigenwert.

L21: Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} , \; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} .$$

L22: Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Setzen Sie A für λ ein und berechnen Sie $\chi_A(A)$.

A20: Sei $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator. Bestimmen Sie $\Delta f(x, y, z)$ für $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

A21: Bestimmen Sie das absolute Maximum (Minimum) der Funktion
$f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot y\,(1 - x)(1 - y)$.

A22: Gegeben sei die Ellipse

$$2x^2 + 3y^2 + 2xy = 4 .$$

Bestimmen Sie die Stelle mit dem kleinsten (größten) Abstand zum Ursprung.

A23: Gegeben sei $f(x, y) = \dfrac{1}{xy + 1}$ $(xy \neq -1)$ und $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Man bestimme die Richtung(en)

a) des stärksten Anstiegs von f in P und den Wert dieser Steigung,

b) des stärksten Gefälles von f in P und den Wert dieser (negativen) Steigung,

c) in denen f weder ansteigt noch abfällt.