Prof. Dr. Wolfram Koepf **Mathematik I** **13.11.2001**
WS 2001/2002

Übungszettel 3

13. Berechnen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad .$$

14. Berechnen Sie $\quad s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad$ für $\qquad n = 1,\, 2,\, \ldots,\, 10$.
Führen Sie die Rechnung iterativ durch!

15. Man betrachte die rekursiv erklärte Folge
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) , \qquad a_0 = 1 \; .$$
(a) Zeigen Sie: Wenn die Folge konvergiert, dann ist ihr Grenzwert
$$x := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \in \Big\{ -\sqrt{3}\,, \sqrt{3} \Big\} \, .$$
(b) Bestimmen Sie $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass
$$\left| a_n - \sqrt{3} \right| < 0{,}0001 \quad \text{für alle } \; n > n_0$$
ist.

16. Bestimmen sie den Grenzwert $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \quad$ für $\quad a_n = \sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 - 3n} \quad$.

17. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Bestimmen sie das Volumen V des von den drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ \lambda \end{pmatrix}$ aufgespannten Spats.
Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $V = 0$ wird. Was bedeutet dies geometrisch für $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$?

18. Welche Lage haben die beiden folgenden Geraden zueinander?

(a) $g: \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -24 \end{pmatrix}$ und $h: \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $g: \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h: \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.