Prof. Dr. Wolfram Koepf **Mathematik I** **27.11.2001**
WS 2001/2002

Übungszettel 5

26. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $z^5 = 1 + i$ in Standarddarstellung und zeichnen Sie sie in die Gaußsche Zahlenebene ein.

27. Berechnen Sie $R := \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$ und $I := \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx)$ in geschlossener Form.
Hinweis: Berechnen Sie $R + i\,I$ mit Hilfe der Moivreschen Formel und zerlegen Sie in Real- und Imaginärteil.

28. Beweisen Sie mit Hilfe komplexer Zahlen den Satz von Thales (im Einheitskreis).
Hinweis: die Multiplikation mit i erzeugt einen rechten Winkel.

29. Gegeben sei die rationale Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 4}$.

    (a) Führen Sie eine Polynomdivision durch und schreiben Sie
    $$f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{x^2 - 4}$$
    mit einem Polynom $p(x)$ und dem Rest $r(x)$.

    (b) $f(x)$ hat für $x \to \infty$ eine Asymptote. Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote.

    (c) (Partialbruchzerlegung) Versuchen Sie weiter $f(x)$ in die Form
    $$f(x) = p(x) + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \qquad (A,\, B \in \mathbb{R})$$
    zu bringen.

30. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
Hinweis: Zeigen Sie
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k\,(k-1)} \qquad \text{für } k \geq 2\,.$$

31. Beweisen Sie: die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$.

32. Gegeben sei die Ebene $E \;:\; x + y + z = 0$. Zeigen Sie, dass die Menge der Ortsvektoren aus E einen Vektorraum bildet.