WS 2003/2004 | **Nachklausur** | **Lineare Algebra I**

Prof. Dr. Wolfram Koepf

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

14. April 2004

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								

1. (*10 Punkte*) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.

   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt.

   Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen.

   Nicht getroffene Entscheidungen haben keine Auswirkung auf die Punktzahl.

   Insgesamt werden nicht weniger als 0 Punkte vergeben.

   Kreuzen Sie direkt auf dem Aufgabenzettel an.

		richtig	falsch
1.	Das Vertauschen zweier Spalten ändert den Wert einer Determinante nicht.	☐	☐
2.	Für alle Primzahlen p ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper.	☐	☐
3.	Seien U und W Untervektorräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, so gilt $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ genau dann, wenn $U \cap W$ nur aus dem Element 0 besteht.	☐	☐
4.	Die Einheitsmatrix hat die Eigenwerte 1 und 0.	☐	☐
5.	Eine injektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ist automatisch bijektiv.	☐	☐
6.	Für n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ gilt $\dim(\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n)) = n$ genau dann, wenn die Vektoren linear unabhängig sind.	☐	☐
7.	Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$. Dann ist $\det A$ eine ganze Zahl.	☐	☐
8.	Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen hat stets eine Lösung, wenn $n > m$ gilt.	☐	☐
9.	Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$ die darstellende Matrix der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann besteht $F^{-1}(v)$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ aus genau einem Element.	☐	☐
10.	Es existieren 2 nicht isomorphe Gruppen mit genau 6 Elementen.	☐	☐

2. (*6 Punkte*) Testen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und bestimmen gegebenenfalls die Inverse.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$

   (b) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

3. (*10 Punkte*) Seien

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Testen Sie die Mengen $\{u, v, w_1\}$ und $\{u, v, w_2\}$ auf lineare Abhängigkeit.

   (b) Von einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien nur die Werte

   $f(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $f(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ bekannt.

   Welche der Werte $f(w_1)$ und $f(w_2)$ kann man aus diesen Vorgaben bestimmen? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Werte an.

4. (*7 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren a, b, c und d:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Stellen Sie d als Linearkombination der Vektoren a, b und c dar. Ist die Darstellung eindeutig?

5. (*6 Punkte*) Gegeben sei die 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -\frac{1}{2a} & -1 \end{pmatrix}$ mit $a \neq 0$.

   Berechnen Sie die Matrizen A^2, A^{2n}, A^{2n+1} für $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

6. (*7 Punkte*) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie Kern und Bild von f.

7. (*12 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

   (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.

   (b) Finden Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ derart, daß SAS^{-1} Diagonalgestalt hat.

Musterlösungen

1.

		richtig	falsch
1.	Falsch: Vertauschen zweier Spalten ändert das Vorzeichen.		X
2.	Richtig.	X	
3.	Richtig, denn $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap V)$.	X	
4.	Falsch: E ist eine Diagonalmatrix ohne eine 0 auf der Diagonale!		X
5.	Richtig: $\dim(\text{Bild } f) = n - \dim(\text{Kern } f) = n - 0 = n$ also muß das Bild $\mathbb{R}^n$ sein.	X	
6.	Richtig: Sind $v_1, \ldots, v_n$ abhängig, wird $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ schon von weniger Elementen erzeugt, ansonsten sind sie eine Basis.	X	
7.	Richtig: Denn $\|A\|$ bildet sich aus Summen von Produkten der Einträge von A.	X	
8.	Falsch: Gegenbeispiel $0X + 0Y = 1$.		X
9.	Richtig, denn A ist invertierbar und F daher bijektiv.	X	
10.	Richtig: Etwa die Permutationen von drei Elementen und $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$.	X	

2. Der Gauß-Algorithmus wird zunächst für beide Matrizen gleichzeitig durchgeführt: in $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ kann Addition und Multiplikation auf den Stellvertretern berechnet werden. Nur bei der Multiplikation und Division einer Zeile muß man wegen $\overline{3} = \overline{0}$ aufpassen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^*} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Schritt 1: III−I→ III, Schritt 2: III−2*II→ III
Schritt 3: 3*I+III→ I, 3*II+III→ II, Schritt 4: I/3→ I, II/3→ II, −III/3→ III

Die Inverse als Matrix über $\mathbb{Q}$ ist also $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Bis zum Schritt 2 kann man diese Rechnungen auch modulo 3 durchführen. Dann steht aber in der dritten Zeile links eine Nullzeile (wegen $\overline{-3} = \overline{0}$). Damit ist also $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix} \in$ $\operatorname{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ nicht invertierbar. Die folgenden (mit “*” markierten) Zeilenoperationen sind in diesem Falle nicht zulässig.

3. (a) Hier wird zweimal der Gaußalgorithmus auf die homogenen Gleichungssysteme angewandt, deren Matrixen durch die Spalten u, v, w_1 beziehungsweise u, v, w_2 gegeben sind. Dies kann man auch simultan machen, indem man u, v, w_1, w_2 auf Stufenform bringt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Im Schritt 1: II-2*I$\rightarrow$ II
Im Schritt 2: III+2*II$\rightarrow$ III
An den ersten drei Spalten sieht man: u, v, w_1 sind linear abhängig. Die Spalten 1,2,4 ergeben: u, v, w_2 sind linear unabhängig.

(b) Da eine lineare Abbildung durch die Bilder der Basiselemente definiert werden kann, nutzt die Kenntnis von $f(u), f(v)$ nichts, um $f(w_1)$ herauszufinden.

Aber u, v, w_1 sind linear abhängig, aus dem Ansatz $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w_1 = 0$ lesen wir aus der oben berechneten Zeilenstufenform ab, daß $\lambda_3 = -1$ willkürlich gewählt werden kann, und dann $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = 2$ folgt, es ist daher $w_1 = 2u + v$. Damit muß aber wegen der Linearität von f auch $f(w_1) = 2f(u) + f(v)$ gelten.

Also ist $f(w_1) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$.

4. Gesucht sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $d = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$. Das entspricht einem inhomogenen linearen Gleichungssystem, welches mit dem Gaußalgorithmus gelöst wird:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Schritt 1: 2*III-I$\rightarrow$ III
Im Schritt 2: III-II$\rightarrow$ III,I-2*II$\rightarrow$ I
Im Schritt 3: I/2$\rightarrow$ I,II/2$\rightarrow$ II
Es ergibt sich λ_3 ist beliebig, $\lambda_2 = 1 - \lambda_3$ und $\lambda_1 = -2 - 2\lambda_3$. Ich wähle $\lambda_3 = 0$ und erhalte damit die Darstellung $d = a - 2b$.

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, da ich ja λ_3 auch anders wählen kann.

5. Es ist $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -\frac{1}{2a} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -\frac{1}{2a} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Aus dem Assoziativgesetz ergibt sich $A^{2n} = (A^2)^n$. Damit ist $A^{2n} = (\frac{1}{2}E)^n = \overbrace{\frac{1}{2}E \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}E}^{n \text{ Faktoren}}$.
   Hier kann man n mal den Faktor $\frac{1}{2}$ vorziehen und erhält damit $A^{2n} = \frac{1}{2^n}E^n = \frac{1}{2^n}E$.
   Es ist weiter $A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A = \frac{1}{2^n}EA = \frac{1}{2^n}A$.

6. Der Kern von f ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(x) = 0$. Diese wird mit dem Gaußalgorithmus bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Im Schritt 1: II-5*I→ II,III-2*I→ III
   Im Schritt 2: 5*I-+2*II→ I,III-II→ III
   Nun ist Zeilenstufenform erreicht. Aus der umgeformten Matrix sieht man, daß $x_3 = 5\lambda, x_4 = 5\mu$ frei wählbar sind, und erhält sofort $-5x_2 = -7 \cdot x_3 + 3x_2 \Rightarrow x_2 = 7 \cdot \lambda - 3\mu$, $x_1 = -4x_3 + x_4 \Rightarrow x_1 = -4\lambda + \mu$. Der allgemeine Lösungsvektor ist daher

$$x = \begin{pmatrix} -4\lambda + \mu \\ 7\lambda - 3\mu \\ 5\lambda \\ 5\mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Also ist Kern $f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$.

   Um das Bild von f zu ermitteln, eliminiere ich mit elementaren Spaltenumformungen (auch möglich: Zeilenumformungen nach Transponieren), bis nur noch ein Satz linear unabhängiger Erzeuger des Bildes in den Spalten steht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 7 & -3 \\ 2 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 7 & -3 \\ 2 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Im Schritt 1: II$-$2*I→ II,III+2I→ III, IV$-$I→ IV
   Im Schritt 2: I+II→ I,$-$II/5→ II,III+$\frac{7}{5}II$ → III,IV$-\frac{3}{5}$II → IV
   Da die Spaltenumformungen das Bild nicht verändern, haben wir in den ersten beiden Spalten nun eine Basis des Bildes von f stehen:

   Bild $f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

7. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

   (a) Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $|A - tE|$. Entwickeln der Determinante nach der ersten Spalte ergibt

   $$|A - tE| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2-t & 1 \end{vmatrix} = (2-t)^3 - (2-t)$$

   Gesucht sind die Nullstellen, also setze ich $(2-t)^3 - (2-t) = (2-t)((2-t)^2 - 1) = 0$. Das Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Damit ist $t = 2$ oder $(2-t)^2 = 1$ also $2 - t = \pm 1$. Damit erhalten wir $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$ als Eigenwerte von A.
   Nun werden Eigenvektoren gesucht, also nichttriviale Elemente des
   Kernes von $A - t_iE, i \in \{1, 2, 3\}$:

   $t_1 = 1$: $A{-}1E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Eine Zeilenumformung (III-I) liefert Zeilenstufenform: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Ich setze willkürlich $x_3 = -1$ und erhalte $x_2 = x_1 = 1$ also als Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   $t_2 = 2$: $A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Offenbar ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, ich erhalte $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   $t_3 = 3$: $A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Hier verschwindet die dritte Zeile nach Addition der ersten. Die ersten beiden Zeilen sind in Zeilenstufenform, mit der Setzung $x_3 = 1$ ergibt sich $x_1 = x_2 = 1$. Damit habe ich $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Die Matrix S^{-1} ergibt sich durch einfaches Nebeneinanderstellen der Eigenvektoren, die zu dem jeweiligen Eigenwert in der Diagonalform gehören. Um S selbst zu bestimmen, wird $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit dem Gaußverfahren invertiert:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Im Schritt 1: II-I$\rightarrow$ II, III+I$\rightarrow$ III, Im Schritt 2: I$-\frac{1}{2}$*III$\rightarrow$ I, $\frac{1}{2}$III $\rightarrow$ III.
   Damit haben wir $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gefunden.
   Probehalber können wir nachrechnen:

   $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$