UNI KASSEL VERSITÄT
Prof. Wolfram Koepf
Peter Horn

Übungen Lineare Algebra II

Blatt 2

SS 2004
03.05.04

Aufgabe 1 (Spatprodukt): Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $x \in \mathbb{R}^3$ eine beliebige Linearkombination

$$x = \lambda u + \mu v + \eta w, \quad \lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R},$$

so gelten

$$\lambda = \frac{[x,v,w]}{[u,v,w]}, \quad \mu = \frac{[u,x,w]}{[u,v,w]} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{[u,v,x]}{[u,v,w]}. \tag{1}$$

a. Welche Voraussetzungen muss man an u, v, w stellen? [2]

Lösung: Es muss $[u,v,w] = \det(u,v,w) \neq 0$ gelten. Also müssen u, v, w linear unabhängig sein. ■

b. Benutze nur das Kreuz- und Skalarprodukt, um (1) zu zeigen. [4]

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned}[x,v,w] &= \langle x \times v, w\rangle = \langle(\lambda u + \mu v + \eta w) \times v, w\rangle \\ &= \langle \lambda(u \times v) + \mu(v \times v) + \eta(w \times v), w\rangle = \langle \lambda(u \times v), w\rangle + \langle \eta(w \times v), w\rangle \\ &= \lambda\langle (u \times v), w\rangle = \lambda \cdot [u,v,w].\end{aligned}$$

Die anderen Skalare werden analog berechnet. ■

c. Welchem Verfahren aus Linearer Algebra I entspricht (1) und warum? [4]

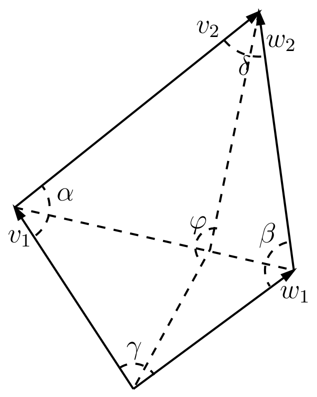
Lösung: Der Cramerschen Regel. ■

[10]

Aufgabe 2 (Ein bisschen Geometrie):

Seien

$$\begin{aligned} v_1 &= (-5,3,0)^T, \\ v_2 &= (2,0,4)^T, \\ w_1 &= (1,3,0)^T, \\ w_2 &= (-4,0,4)^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \\ v_1 + v_2 &= w_1 + w_2. \end{aligned}$$



a. Berechne die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und φ. [3]

Lösung: Es ist $\alpha = \pi - \measuredangle(v_1, v_2) = \pi - \arccos \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \pi - \arccos\left(-\frac{\sqrt{34}\sqrt{5}}{34}\right) \approx 1.17 \approx 67°$. β, γ, δ werden analog berechnet. Zur Berechnung von φ berechne $\measuredangle(v_1 \times w_1,\ v_2 \times w_2)$. ■

b. Wie stehen die Ebenen, die von v_1, w_1 bzw, v_2, w_2 aufgespannt werden, zueinander? [1]

Lösung: Wegen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ stehen die Ebenen senkrtecht zueinander. ■

c. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Zeige: $|[u,v,w]|$ entspricht dem Volumen des von u, v, w aufgespannten Spats. [3]

Lösung: Es ist $|[u,v,w]| = |\langle u \times v, w\rangle|$. Die Grundfläche das Spates ist $I = |u \times v|$, um das Volumen V zu brechnen benötigen wir noch die Höhe h, also den Abstand von w von der Ebene $\text{span}(u,v)$. Dies ist $h = \frac{|\langle w, u \times v\rangle|}{|u \times v|}$.

Das führt zu $V = I \cdot h = |u \times v| \cdot \frac{|\langle w, u \times v\rangle|}{|u \times v|} = |[u,v,w]|$. ■

d. Wie kann im $\mathbb{R}^3$ der Abstand eines Punktes zu einer Geraden berechnet werden? (Vgl. Vorlesung.) [3]

Lösung: Sei $G : v_0 + \lambda v$ eine Gerade im R^3 und $w \in \mathbb{R}^3$ ein weiterer Vektor. Durch den Übergang zu $w - v_0$ kann Ohne Einschränkung $v_0 = 0$ vorausgesetzt werden.

Die Vektoren v und w spannen eine Paralelelogramm mit dem Flächeninhalt $v \times w$ auf, andererseits ist die Fläche des Paralellogramms aber auch Grundseite mal Höhe – und die Höhe ist der gesuchte Abstand. Damit ist $h \cdot \|v\| = \|v \times w\|$ und $h = \frac{\|v \times w\|}{\|v\|}$. ■

[10]

Aufgabe 3 (Vektorprodukt): Seien $u, v, w, u', v' \in \mathbb{R}^3$ reelle Vektoren.

a. Zeige: $(u \times v) \times (u' \times v') = u' \det(u, v, v') - v' \det(u, v, u')$ [4]

Lösung: Es ist

$$(u \times v) \times (u' \times v') = \begin{pmatrix} (u_1' v_3' - u_3' v_1')\,(u_1 v_2 - u_2 v_1) - (u_1' v_2' - u_2' v_1')\,(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ (u_2' v_3' - u_3' v_2')\,(u_1 v_2 - u_2 v_1) - (u_1' v_2' - u_2' v_1')\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) \\ (u_2' v_3' - u_3' v_2')\,(u_1 v_3 - u_3 v_1) - (u_1' v_3' - u_3' v_1')\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) \end{pmatrix},$$

mit geschickter Umsortierung erhält man die Behauptung. ■

b. Zeige: $\langle u \times v, u' \times v' \rangle = \langle u, u' \rangle \langle v, v' \rangle - \langle v, u' \rangle \langle u, v' \rangle$ [4]

Lösung: Ebenfalls direktes Nachrechnen. ■

c. Zeige: u, v, w linear unabhängig $\iff$ $u \times v,\ v \times w, w \times u$ linear unabhängig. [2]

Lösung: Die Aussage ist anschaulich klar, wenn man sich überlegt, wie die Vektoren im Raum stehen. Hier soll aber auch ein „abstrakter“ Beweis gegeben werden.

„$\Leftarrow$“ durch Kontraposition: Sind u, v, w linear abhängig, so ist etwa $u = \lambda v + \eta w,\ \{\lambda, \eta\} \neq \{0\}$. Damit folgen $u \times v = (\lambda v + \eta w) \times v = \eta w \times v$ und $u \times w = \lambda v \times w$ und damit $u \times v, u \times w \in \operatorname{span}(w \times v)$, also sind $u \times v,\ v \times w, w \times u$ linear abhängig.

„$\Rightarrow$“: Seien u, v, w linear unabhängig. Definiere die Ebenen $E_1 := \operatorname{span}(u \times v),\ E_2 := \operatorname{span}(v, w),\ E_3 := \operatorname{span}(w, u)$. Diese haben die Normalenvektoren $n_1 := u \times v,\ n_2 := v \times w,\ n_3 := w \times u$. Zwecks Widerspruchs nehme nun an, n_1, n_2, n_3 seien linear abhängig. Dann liegen sie in einer Ebene und $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ enthält eine Gerade λx. Dann müssen aber u, v, w linear abhängig sein. Widerspruch. ■

[10]

Abgabe bis 10. Mai 2004 11:00h in den Kästen im zweiten Stock.

[30]