UNI KASSEL VERSITÄT
Prof. Wolfram Koepf
Peter Horn

Übungen Lineare Algebra II

Blatt 3

SS 2004
10.05.04

Aufgabe 1 (Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^n$): Wir haben in der Vorlesung das Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kennengelernt. Es gibt keine Verallgemeinerung der Form $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, aber wir können eine Abbildung definieren:

$$\underbrace{R^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n-1\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)}) \longmapsto v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \det(A_i) \cdot e_i$$

mit: $v^{(1)} \times \ldots \times v^{(n-1)}$ steht senkrecht auf jedem $v^{(i)}$, $1 \leq i \leq n-1$. Dabei ist $A := (v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)})^T$ und A_i ist die Matrix, die durch Streichen der i-ten Spalte aus A entsteht.
Zeige:

a. Es gilt $\langle v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)},\ v \rangle = \det \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \\ v_1^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-1)} & \ldots & v_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$. [4]

Lösung: Es ist

$$v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} = \begin{pmatrix} \det(A_1) \\ -\det(A_2) \\ \vdots \\ \pm\det(A_n) \end{pmatrix}, \quad \text{und damit } \langle v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)},\ v \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i (-1)^{i+1} \det(A_i),$$

was nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz genau der angegebenen Determinante entspricht. ■

b. Das verallgemeinerte Vektorprodukt ist linear in jeder Komponente, also: [4]

$$\begin{aligned} v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times (v+w) \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} &= \left(v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times v \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)}\right) \\ &\quad + \left(v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times w \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)}\right) \\ v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times \lambda v \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} &= \lambda \left(v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times v \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Lösung: Wir zeigen nur die erste Gleichung. Seien $A := (v^{(1)}, \cdots, v^{(i-1)}, (v+w), v^{(i+1)}, \cdots, v^{(n-1)})^T$, $A^{(v)} := (v^{(1)}, \cdots, v^{(i-1)}, v, v^{(i+1)}, \cdots, v^{(n-1)})^T$ und $A^{(w)} := (v^{(1)}, \cdots, v^{(i-1)}, w, v^{(i+1)}, \cdots, v^{(n-1)})^T$, ausserdem seien $x, x^{(v)}$, $x^{(w)}$ die entsprechenden Kreuzprodukte.

Fixiere ein $1 \leq i \leq n$. Dann sind $x_i = (-1)^i \det A_i$, $x_i^{(v)} = (-1)^i \det A_i^{(v)}$ und $x_i^{(w)} = (-1)^i \det A_i^{(w)}$. Wegen der Multiinearität der Determinante ist $\det A_i = \det A_i^{(v)} + \det A_i^{(w)}$, deswegen ist $x_i = x_i^{(v)} + x_i^{(w)}$ und damit $x = x^{(v)} + x^{(w)}$. ■

c. Es gilt $v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} = 0 \iff v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)}$ linear abhängig. [4]

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} = 0 &\iff \det A_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n \\ &\iff v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)} \text{ sind linear abhängig.} \end{aligned}$$

■

d. Es gilt $\langle v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)},\ v^{(i)} \rangle = 0$ für $1 \leq i \leq n-1$. [3]

Lösung: Die Aussage folgt aus (a). ■

[15]

Aufgabe 2: Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $v_1,\ldots,v_r$ eine orthonormale Familie $\left(\text{d.h. } \langle v_i,v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}\right)$.

Zeige: Es sind äquivalent: [15]

a. $(v_1,\ldots,v_r)$ ist eine Basis von V.

b. Für $v\in V$ gilt: Ist $\langle v_i,v\rangle = 0$ für alle i, so ist $v=0$.

c. Für $v\in V$ gilt: $v=\sum_{i=1}^r \langle v,v_i\rangle\, v_i$.

d. Für alle $v,w\in V$ gilt: $\langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^r \langle v,v_i\rangle\,\langle v_i,w\rangle$.

e. Für alle $v\in V$ gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^r |\langle v,v_i\rangle|^2$.

Lösung: „a⇒b“: Ist $v_1,\ldots,v_r$ eine Basis von V, so kann man jedes $v\in V$ schreiben als $v=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_r v_r$. Damit gilt $\langle v_i,v\rangle=\lambda_i$, und damit folgt aus $\langle v_i,v\rangle = 0$ für alle i, dass $v=0$ ist.
„a⇒c“: Wie oben ist $\langle v,v_i\rangle=\lambda_i$, und damit $\sum_{i=1}^r\langle v,v_i\rangle\, v_i=\sum_{i=1}^r\lambda_i v_i=v$.
„c⇒d“: Sei $v,w\in V$. Wir benutzen (c) für v und w, dann ist $\langle v,w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r\langle v,v_i\rangle v_i,\ \sum_{i=1}^r\langle w,v_i\rangle v_i\right\rangle = \sum_{i=1}^r\left\langle\langle v,v_i\rangle v_i,\ \sum_{j=1}^r\langle w,v_j\rangle v_j\right\rangle = \sum_{i=1}^r\left\langle\langle v,v_i\rangle v_i,\ \langle w,v_i\rangle v_i\right\rangle = \sum_{i=1}^r\langle v,v_i\rangle\cdot\langle w,v_i\rangle$.
„d⇒e“: Mit (d) ist $\|v\|^2=\sum_{i=1}^r|\langle v,v_i\rangle\cdot\langle v,v_i\rangle| = \sum_{i=1}^r|\langle v,v_i\rangle|^2$.
„e⇒a“: Die lineare Unabhägigkeit der v_i ist klar, es bleibt zu zeigen dass $\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_r)=V$. Sei $w\in V$ ein weiterer linear unabhängiger Vektor, der orthogonal zu allen v_i steht. Dann ist $\|w|\|^2=\sum_{i=1}^r|\langle w,v_i\rangle|^2=0$, also $w=0$. Damit erzeugen die v_i schon V.
„b⇒a“: Wie eben kann es keinen weiteren linear unabhängigen, orthogonalen Vektor geben. ■ **[15]**

Abgabe bis 17. Mai 2004 11:00h in den Kästen im zweiten Stock.

[30]