UNI KASSEL VERSITÄT
Prof. Wolfram Koepf
Peter Horn

Übungen Lineare Algebra II

SS 2004
17.05.04

Blatt 4

Aufgabe 1 (Legendre-Polynome): In dieser Aufgabe wollen wir den Polynomring $\mathbb{R}[x]$ als (unendlich-dimensionalen) $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Als Basis wählen wir die Legendre-Polynome, die durch folgende Rekursionsgleichung gegeben sind:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)\,x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

a. Zeige: $P_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n. [1]

Lösung: Die Aussage folgt durch Induktion. ■

b. Gib $P_i(x)$ an für $i = 1, \ldots, 5$. [2]

Lösung:

$$\begin{array}{lll} P_0 = 1 & P_1 = x & P_2 = \left(\frac{3}{2}\right)x^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \\ P_3 = \left(\frac{5}{2}\right)x^3 - \left(\frac{3}{2}\right)x & P_4 = \left(\frac{35}{8}\right)x^4 - \left(\frac{15}{4}\right)x^2 + \left(\frac{3}{8}\right) & P_5 = \left(\frac{63}{8}\right)x^5 - \left(\frac{35}{4}\right)x^3 + \left(\frac{15}{8}\right)x \end{array}$$

■

c. Zeige: $B_P := (P_n(x),\ n \in \mathbb{N}_0)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[x]$. [4]

Lösung: Wegen $\deg P_n = n$ ist klar, dass die P_n den Polynomring erzeugen. Für die lineare Unabhängigkeit betrachte

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = \underbrace{\lambda_n P_n}_{\text{Grad } n} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i}_{\text{Grad } n-1},$$

also ist $\lambda_n = 0$. induktiv folgt $\lambda_0, \ldots, \lambda_n = 0$ und die P_i sind linear unabhängig. ■

d. Berechne $\Phi_P(f)$ für $f \in \{x^2,\ x^5\}$, also $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(x)$. [5]

Lösung: Es ist $(\frac{2}{3}P_2 + \frac{2}{6}P_0 = x^2$, also ist $\Phi_{B_P}(x^2) = (\frac{2}{6}, 0, \frac{2}{3}, 0, 0, \ldots)$.

Für x^5 gilt $x^5 = \frac{8}{63}P_5 + \frac{10}{9}\frac{2}{5}P_3 + \frac{3}{7}P_1$, also ist $\Phi_{B_P}(x^5) = (0, \frac{3}{7}, 0, \frac{2}{9}, 0, \frac{8}{63}, 0, 0, \ldots)$. ■

Nun führen wir auf $\mathbb{R}[x]$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x.$$

e. Zeige: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist bilinear. [2]

Lösung: Folgt elementar aus den Eigenschaften des Integrals. ■

Nun betrachten wir den 6-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}[x]$ der Polynome bis Grad 5

$$V := \{ f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq 5 \}$$

f. Orthogonalisiere die Basis $B := \{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5\}$ von V nach Gram-Schmidt mit der Modifikation: [5]

$$w_m = v_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle v_m, w_k \rangle \frac{w_k}{\|w_k\|^2}, \qquad 1 \leq n \leq n.$$

Lösung:

$$w_0 := 1 \qquad w_1 := x - \langle x, 1 \rangle \frac{1}{\|1\|^2} = x$$

$$w_2 := x^2 - \langle x^2, x \rangle \frac{x}{\|x\|^2} - \langle x^2, 1 \rangle \frac{1}{\|1\|^2} = x^2 - \frac{2}{6} \qquad \text{u.s.w.}$$

■

g. Vergleiche das Ergebnis mit B_P. [1]

Lösung: Die w_i stimmen bis auf skalare Vielfache mit den P_i überein. ∎

Tatsächlich ist $\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} & n = m. \end{cases}$ Damit sind die P_n eine Orthogonalbasis bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$. **[20]**

Aufgabe 2 (Orthogonale Endomorphismen): Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus.

a. Zeige: F ist winkeltreu genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ und $G \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal existieren mit $F = \lambda \cdot G$. [5]

Lösung: „$\Leftarrow$“ Seien $v, w \in V$. Es ist $\measuredangle(\lambda G(v), \lambda G(w)) = \arccos \frac{\langle \lambda G(v), \lambda G(w)\rangle}{\|\lambda G(v)\| \cdot \|\lambda G(w)\|} = \arccos \frac{\lambda^2 \langle G(v), G(w)\rangle}{\lambda^2 \|G(v)\| \cdot \|G(w)\|} = \arccos \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \measuredangle(v,w)$.

„$\Rightarrow$“ Sei nun $F \in \mathrm{End} V$, dann ist F genau dann winkeltreu, wenn für alle $v, w \in V$ gilt $\frac{\langle F(v), F(w)\rangle}{\|F(v)\| \cdot \|F(w)\|} = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$. Demnach existieren eine Abbildung $\mu : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $\langle F(v), F(w)\rangle = \mu(v,w)\langle v,w\rangle$ und ein Abbildung $\eta : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\|F(v)\| = \eta(v)\|v\|$. Wegen $\mu(v,w) = \frac{\|F(v)\| \cdot \|F(w)\|}{\|v\| \cdot \|w\|}$ ist dann $\mu(v,w) = \eta(v) \cdot \eta(w)$ für alle $v, w \in V$.

Sei nun $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt für $i \neq j$

$$\begin{aligned} 0 = \langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle &= \frac{\langle F(e_i + e_j), F(e_i - e_j)\rangle}{\|F(e_i + e_j)\| \cdot \|F(e_i - e_j)\|} \cdot \|e_i + e_j\| \cdot \|e_i - e_j\| \\ &= \frac{\langle F(e_i + e_j), F(e_i - e_j)\rangle}{\eta(e_i + e_j)\eta(e_i - e_j)} = \frac{\|F(e_i)\|^2 - \|F(e_j)\|^2}{\eta(e_i + e_j)\eta(e_i - e_j)} = \frac{\eta(e_i)^2 - \eta(e_j)^2}{\eta(e_i + e_j)\eta(e_i - e_j)} \end{aligned}$$

und damit sind $\eta = c$ und $\mu = c^2$ konstant. Also sind $\langle F(v), F(w)\rangle = c^2 \langle v,w\rangle$ und $\|F(v)\| = c\|v\|$. Damit sind $G := \frac{1}{c} \cdot F$ und $\lambda := c$ wie gesucht gefunden. ∎

b. Zeige: Ist $V = \mathbb{R}^3$ und F ein orthogonaler Endomorphismus, so gilt für $u, v \in V$ [5]

$$F(u) \times F(v) = \det F \cdot F(u \times v).$$

Lösung: Es ist $\|F(v) \times F(w)\|^2 = \|F(v)\|^2 \cdot \|F(w)\|^2 - \langle F(v), F(w)\rangle^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2 = \|v \times w\|^2 = \|F(v \times w)\|^2$. Demnach existiert ein $\lambda \in \{\pm 1\}$ mit $\|F(v) \times F(w)\| = \lambda \|v \times w\|$.

Es bleibt zu zeigen: $\lambda = \det(A)$, wobei $A = (o_1, o_2, o_3)$ die darstellende Matrix zu F ist. Die Spalten o_1, o_2, o_3 bilden eine Orthonormalbasis des R^3. Dann gilt

$$1 = \langle F(o_1) \times F(o_2), F(o_3)\rangle = \lambda \langle F(o_1 \times o_2), F(o_3)\rangle = \lambda \langle o_1 \times o_2, o_3\rangle = \lambda \det A.$$

Wegen $\det A \in \{\pm 1\}$ ist $\lambda = \det A$. ∎

[10]

Abgabe bis 24. Mai 2004 11:00h in den Kästen im zweiten Stock. **[30]**