UNIKASSEL VERSITÄT
Prof. Wolfram Koepf
Peter Horn

Übungen Lineare Algebra II

Blatt 1

SS 2004
26.04.04

Aufgabe 1 (Eigenwerte): Sei $0 \neq A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix. A heisst *nilpotent*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^m = 0$. A heisst *idempotent*, wenn $A^2 = A$ gilt.

a. Zeige: Ist A nilpotent, so sind alle Eigenwerte 0. [2]

b. Zeige: Die Matrix $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist nilpotent. [2]

c. Welche Eigenwerte kommen für idempotente Matrizen in Frage? [2]

d. Zeige: Ist A singulär, so hat A mindestens einen Eigenwert 0. [2]

e. Charakterisiere den Eigenraum zum Eigenwert 0. [2]

[10]

Aufgabe 2 (Matrizen über Ringen): Wir können auch über einem allgemeinen kommutativen Ring R Matrizen betrachten. Die Definition der Determinante überträgt sich wörtlich.

a. Zeige: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, R)$, so ist $\det A \in R$. [2]

b. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Invertierbarkeit von A und $\det A$? [6]

c. Invertiere – wenn möglich – die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}), \qquad B = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$$

über den entsprechenden Ringen. [2]

[10]

Aufgabe 3 (Skalarprodukt): Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Fixiere ein $v \in V$ und definiere eine Abbildung

$$\lambda_v : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \longmapsto \langle v, x \rangle.$$

a. Zeige: λ_v ist linear, was ist die darstellende Matrix zu λ_v? [4]

b. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix. Zeige: Die Abbildung

$$\lambda_A : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \longmapsto x^T \cdot A \cdot y$$

ist bilinear. [4]

c. Zwei Vektoren $u, w \in V$ heissen *orthogonal*, wenn $\langle u, w \rangle = 0$ gilt. Zeige den Satz des Pythagoras: $\|u\|^2 + \|w\|^2 = \|u - w\|^2$. [2]

[10]

Abgabe bis 3. Mai 2004 in den Kästen im zweiten Stock.

[30]