UNIKASSEL VERSITÄT
Prof. Wolfram Koepf
Peter Horn

Übungen Lineare Algebra II

Blatt 3

SS 2004
10.05.04

Aufgabe 1 (Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^n$): Wir haben in der Vorlesung das Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kennengelernt. Es gibt keine Verallgemeinerung der Form $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, aber wir können eine Abbildung definieren:

$$\underbrace{R^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n-1\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)}) \longmapsto v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \det(A_i) \cdot e_i$$

mit: $v^{(1)} \times \ldots \times v^{(n-1)}$ steht senkrecht auf jedem $v^{(i)}$, $1 \le i \le n-1$. Dabei ist $A := (v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)})^T$ und A_i ist die Matrix, die durch Streichen der i-ten Spalte aus A entsteht.
Zeige:

a. Es gilt $\langle v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)},\ v\rangle = \det \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \\ v_1^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-1)} & \ldots & v_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$. [4]

b. Das verallgemeinerte Vektorprodukt ist linear in jeder Komponente, also: [4]

$$\begin{aligned} v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times (v+w) \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} &= \left(v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times v \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)}\right) \\ &\quad + \left(v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times w \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)}\right) \\ v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times \lambda v \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} &= \lambda \left(v^{(1)} \times \cdots \times v^{(i-1)} \times v \times v^{(i+1)} \times \cdots \times v^{(n-1)}\right). \end{aligned}$$

c. Es gilt $v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)} = 0 \iff v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)}$ linear abhängig. [4]

d. Es gilt $\langle v^{(1)} \times \cdots \times v^{(n-1)},\ v^{(i)}\rangle = 0$ für $1 \le i \le n-1$. [3]

[15]

Aufgabe 2: Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $v_1, \ldots, v_r$ eine orthonormale Familie $\left(\text{d.h. } \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\right)$.
Zeige: Es sind äquivalent: [15]

a. $(v_1, \ldots, v_r)$ ist eine Basis von V.

b. Für $v \in V$ gilt: Ist $\langle v_i, v \rangle = 0$ für alle i, so ist $v = 0$.

c. Für $v \in V$ gilt: $v = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle v_i$.

d. Für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle \langle v_i, w \rangle$.

e. Für alle $v \in V$ gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^r |\langle v, v_i \rangle|^2$.

[15]

Abgabe bis 17. Mai 2004 11:00h in den Kästen im zweiten Stock.

[30]