UNIKASSEL VERSITÄT
Prof. Wolfram Koepf
Peter Horn

Übungen Lineare Algebra II

Blatt 4

SS 2004
17.05.04

Aufgabe 1 (Legendre-Polynome): In dieser Aufgabe wollen wir den Polynomring $\mathbb{R}[x]$ als (unendlich-dimensionalen) $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Als Basis wählen wir die Legendre-Polynome, die durch folgende Rekursionsgleichung gegeben sind:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ (n+1)\,P_{n+1}(x) &= (2n+1)\,x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

a. Zeige: $P_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n. [1]

b. Gib $P_i(x)$ an für $i = 1, \ldots, 5$. [2]

c. Zeige: $B_P := (P_n(x),\ n \in \mathbb{N}_0)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[x]$. [4]

d. Berechne $\Phi_P(f)$ für $f \in \{x^2,\ x^5\}$, also $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(x)$. [5]

Nun führen wir auf $\mathbb{R}[x]$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x.$$

e. Zeige: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist bilinear. [2]

Nun betrachten wir den 6-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}[x]$ der Polynome bis Grad 5

$$V := \{ f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq 5 \}$$

f. Orthogonalisiere die Basis $B := \{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5\}$ von V nach Gram-Schmidt mit der Modifikation: [5]

$$w_m = v_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle v_m, w_k \rangle \frac{w_k}{\|w_k\|^2}, \qquad 1 \leq n \leq n.$$

g. Vergleiche das Ergebnis mit B_P. [1]

Tatsächlich ist $\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} & n = m. \end{cases}$ Damit sind die P_n eine Orthogonalbasis bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$. **[20]**

Aufgabe 2 (Orthogonale Endomorphismen): Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus.

a. Zeige: F ist winkeltreu genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ und $G \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal existieren mit $F = \lambda \cdot G$. [5]

b. Zeige: Ist $V = \mathbb{R}^3$ und F ein orthogonaler Endomorphismus, so gilt für $u, v \in V$ [5]

$$F(u) \times F(v) = \det F \cdot F(u \times v).$$

[10]

Abgabe bis 24. Mai 2004 11:00h in den Kästen im zweiten Stock.

[30]