Kurzskript zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

von H.-G. Rück

Wintersemester 2002/2003

In diesem Kurzskript werden lediglich die wichtigsten Definitionen und Sätze zusammengefaßt. Es ersetzt keinesfalls den Besuch der Vorlesung, da alle Kommentare, Beispiele und Beweise fehlen.

1 Das Lösen von linearen Gleichungssystemen

Definition 1.1. Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\ . \end{matrix}$$

Die *Koeffizienten* a_{ij} und die *absoluten Glieder* b_j liegen in einem Grundkörper K (z. B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$, dazu später mehr).

Das Schema $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt *Koeffizientenmatrix.*

Und $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt *erweiterte Koeffizientenmatrix.*

Elementare Veränderungen – Umformungen

Elementare Veränderungen eines Gleichungssystems sind
a) Vertauschen zweier Gleichungen,
b) Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ungleich 0,
c) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Satz 1.1. Die elementaren Veränderungen a), b), c) ändern nichts an der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

Diese Veränderungen bedeuten für die erweiterte Koeffizientenmatrix elementare Zeilenumformungen, nämlich
a) Vertauschen zweier Zeilen,
b) Multiplikation einer Zeile (d. h. aller Zahlen einer Zeile) mit einer Zahl ungleich 0,
c) Addition (wieder koeffizientenweise) eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Folgerung aus Satz 1.1. Elementare Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix ändern nichts an der Lösungsmenge der zugehörigen Gleichungssysteme.

Gauß-Algorithmus

Es sei $C = (c_{ij})$ eine $(k \times l)$-Matrix, d. h. C habe k Zeilen und l Spalten.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kl} \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Suche die erste Spalte der Matrix C, die nicht nur Nullen enthält. Dies sei die j_1-te Spalte. Darin sei das Element $c_{ij_1} \neq 0$. Dann vertausche die 1. Zeile mit der i-ten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \tilde{c}_{1j_1} \neq 0 & \\ \vdots & & \vdots & \tilde{c}_{2j_1} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{c}_{kj_1} & \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Für $i = 2, \dots, k$ addiere zu der i-ten Zeile das $\left(-\frac{\tilde{c}_{ij_1}}{\tilde{c}_{1j_1}}\right)$-fache der 1. Zeile.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \tilde{c}_{1j_1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 \ \dots & 0 & \tilde{c}_{1j_1} & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \approx{C} \\ 0 \ \dots & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

3. Schritt: Wende Schritt 1 und 2 auf die Teilmatrix $\overset{\approx}{C}$ an, usw.

Als Ergebnis des Gauß-Algorithmus erhält man eine Matrix in *Treppenform:*
Eine Matrix $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,l}}$ ist in Treppenform, falls (C die Nullmatrix ist oder) es eine Folge $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq l$ von r Sprungstellen gibt mit:
i) unterhalb der r-ten Zeile stehen nur Nullen (d. h. $c_{ij} = 0$ für alle $i > r$ und alle j),
ii) an den Sprungstellen stehen Elemente $c_{ij_i} \neq 0$, für alle $i = 1, \dots, r$,
iii) links von einem Sprungelement c_{ij_i} stehen nur Nullen (d. h. $c_{ij} = 0$ für alle $j = 1, \dots, j_i - 1$),

z.B. $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{1j_1} & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots\dots & & 0 & 0 & c_{2j_2} & * & * & * \\ 0 & \dots\dots\dots & & & & 0 & c_{3j_3} & * & * \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ für $r = 3$.

Lösen eines linearen Gleichungssystems

Sei

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem.
Bilde die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Bringe C mit dem Gauß-Algorithmus auf Treppenform:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{1j_1} & & * & & \\ & \tilde{c}_{2j_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \tilde{c}_{rj_r} \end{pmatrix}$$

Übersetze diese Form zurück in ein lineares Gleichungssystem:

1. Fall: In der letzten Spalte ist eine Sprungstelle. D. h. die r-te Zeile sieht so aus: $(0 \dots 0 \quad \tilde{b}_r)$, dies bedeutet $0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = \tilde{b}_r \neq 0$. Dies geht nicht, also hat das lineare Gleichungssystem *keine* Lösung.

2. Fall: In der letzten Spalte ist keine Sprungstelle. Dann wähle man für alle Variablen, die *nicht* zu Sprungstellen gehören, „freie" Variablen λ_i.

Anschließend löse man die Gleichungen von unten nach oben nach den Sprungstellenvariablen auf. Die Lösungsmenge hat dann bei n Variablen und r Sprungstellen genau $n-r$ „Parameter". (Diese Begriffe werden im Verlauf der Vorlesung präzisiert.)

2 Rechenbereiche: Gruppen, Ringe, Körper

Definition 2.1. Eine nichtleere Menge G mit einer Verknüpfung, d. h. einer Abbildung $\circ : G \times G \longrightarrow G, \quad (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \circ g_2$, heißt *Gruppe*, wenn folgendes erfüllt ist:
i) Assoziativgesetz: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$.

ii) Existenz eines neutralen Elements: Es gibt ein $e \in G$, mit $e \circ g = g \circ e = g$ für alle $g \in G$.
(Bemerkung: Ein solches e ist dann eindeutig, denn $e' = e \circ e' = e$.)
iii) Existenz von Inversen: zu jedem $g \in G$ gibt es ein $g' \in G$ mit $g \circ g' = g' \circ g = e$.
(Bemerkung: *das* Inverse zu g ist auch eindeutig, denn aus $g \circ g' = e$ und $g'' \circ g = e$ folgt $g' = g''$.)

Definition 2.2. Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt *abelsche Gruppe,* wenn $\circ$ kommutativ ist, d. h. wenn $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.

Definition 2.3. Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ (d. h. $+ : R \times R \longrightarrow R$ und $\cdot : R \times R \longrightarrow R$) heißt *Ring,* wenn folgendes gilt:
i) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
ii) Assoziativgesetz für $\cdot$: $r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3$ für alle $r_1, r_2, r_3 \in R$,
ii) Distributivgesetze: $r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3)$ und $(r_1 + r_2) \cdot r_3 = (r_1 \cdot r_3) + (r_2 \cdot r_3)$ für alle $r_1, r_2, r_3 \in R$.

Definition 2.4. Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *kommutativ,* wenn $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$ gilt, für alle $r_1, r_2 \in R$. Ein Element $1 \in R$ heißt *Einselement,* wenn $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$ für alle $r \in R$.

Wichtiges neues Beispiel, Restklassenringe

Sei m eine natürliche Zahl (d. h. $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$). Man betrachte die Menge aller „Reste“ bei der Division durch m:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

Zwei Reste werden so addiert: seien $\overline{a}$ und $\overline{b}$ aus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, dann nehme man zwei ganze Zahlen a und b, die gerade die entsprechenden Reste bei Division durch m ergeben, addiere diese Zahlen in $\mathbb{Z}$ und bilde davon den Rest modulo m: also $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$.

Natürlich muß man erst einmal zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Zahlen a und b ist.

Analog definiert man $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$.

Dann gilt: $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement. Die Null ist $\overline{0}$, die Eins ist $\overline{1}$.

Definition 2.5. Ein kommutativer Ring mit Einselement $(K, +, \cdot)$ heißt *Körper*, wenn zusätzlich $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe ist, d. h. wenn jedes Element $x \in K$ mit $x \neq 0$ ein multiplikativ Inverses besitzt.

Satz 2.1. Wenn p eine Primzahl ist ($p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$), dann ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper. Wenn p keine Primzahl ist, dann ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kein Körper.

3 Vektorräume

Definition 3.1. Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer Verknüpfung $+ : V \times V \longrightarrow V$ (Addition) und einer äußeren Verknüpfung $\cdot : K \times V \longrightarrow V$(Skalarmultiplikation) heißt *K-Vektorraum,* wenn
i) $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist
ii) und wenn für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$ folgende Gesetze gelten

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\cdot v &= (\lambda\cdot v)+(\mu\cdot v),\\ \lambda\cdot(v+w) &= (\lambda\cdot v)+(\lambda\cdot w),\\ \lambda\cdot(\mu\cdot v) &= (\lambda\cdot\mu)\cdot v,\\ 1\cdot v &= v.\end{aligned}$$

Beispiele. U. a. K^n(speziell $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$), Polynomring $K[X]$.

Rechenregeln in Vektorräumen

Sei V ein K-Vektorraum, dann gilt:
i) $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$,
ii) $\lambda \cdot 0 = 0$ für alle $\lambda \in K$,
iii) wenn $\lambda \cdot v = 0$, dann gilt $\lambda = 0$ oder $v = 0$.
iv) $(-1) \cdot v = -v$.

Definition 3.2. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $V' \subset V$ heißt *Untervektorraum* (Teilraum, linearer Teilraum) *von V,* wenn V' bezüglich der in V erklärten Addition und Skalarmultiplikation auch ein K-Vektorraum ist.

Satz 3.1. Eine Teilmenge V' $\quad(V' \neq \emptyset)$ eines K-Vektorraums V ist genau dann Untervektorraum von V, wenn folgende beiden Bedingungen gelten:
a) für alle $v_1, v_2 \in V'$ ist $v_1 + v_2 \in V'$,
b) für alle $\lambda \in K$ und alle $v \in V'$ ist $\lambda \cdot v \in V'$.

Satz 3.2. Es sei V ein K-Vektorraum und es seien V_1, V_2 zwei Untervektorräume von V, dann ist der Durchschnitt $V_1 \cap V_2$ wieder ein Untervektorraum von K. Ebenso ist die Summe $V_1 + V_2$, definiert als $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$, ein Untervektorraum.

Definition 3.3. Sei V ein K-Vektorraum und es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren $v_i \in V$ (d. h. I ist eine Indexmenge und die Vektoren werden mit I numeriert; bei $I = \{1, \ldots, n\}$ ist $(v_i)_{i\in I} = (v_1, \ldots, v_n)$ einfach ein n-Tupel, bei $I = \mathbb{N}$ ist $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge), dann bezeichne $\mathrm{Lin}(v_i)_{i\in I}$ den kleinsten Untervektorraum von V, der alle $v_i, i \in I$ enthält. Er heißt *lineare Hülle* der Familie $(v_i)_{i\in I}$.

Äquivalente Form der Definition. $\mathrm{Lin}(v_i)_{i\in I}$ ist gleich der Menge aller endlichen Linearkombinationen $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$, wobei $(v_1, \ldots, v_r)$ alle endlichen Teilfamilien von $(v_i)_{i\in I}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ alle Elemente aus K durchlaufen.

Definition 3.4. Sei V ein K-Vektorraum. Eine endliche Familie $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren aus V heißt *linear unabhängig,* wenn folgendes gilt:
Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$, dann müssen alle $\lambda_i = 0$ sein. (Das Gegenteil ist *linear abhängig:* $(v_1, \dots, v_r)$ sind linear abhängig, wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ gibt, die nicht alle gleich 0 sind, für die aber $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$ ist).
Eine beliebige Familie $(v_i)_{i\in I}$ heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

Äquivalente Definition von „linear unabhängig“. Sei V ein K-Vektorraum und sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. $(v_i)_{i\in I}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn gilt: Jeder Vektor $v \in \mathrm{Lin}(v_i)_{i\in I}$ läßt sich (nur) eindeutig aus Vektoren der Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear kombinieren.

Definition 3.5. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V heißt *Erzeugendensystem von V,* wenn $V = \mathrm{Lin}(v_i)_{i\in I}$. V heißt *endlich erzeugt,* wenn V ein endliches Erzeugendensystem besitzt. $(v_i)_{i\in I}$ heißt *Basis von V,* wenn $(v_i)_{i\in I}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.

Satz 3.3. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in einem K-Vektorraum $V (V \neq \{0\})$. Dann sind äquivalent:
i) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V,
ii) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d. h. alle Vektoren werden gebraucht, um V zu erzeugen.
iii) $(v_i)_{i\in I}$ ist maximale linear unabhängige Familie, d. h. nimmt man ein Element hinzu, dann wird die Familie linear abhängig.

Folgerung. Aus jedem endlichen Erzeugendensystem eines Vektorraums kann man eine Basis auswählen. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis. ($\{0\}$ gibt man die „Basis“ $\emptyset$.)

Ohne Beweis. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Satz 3.4. (Steinitzscher Austauschsatz) Sei V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum. $(v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis von V. Weiterhin sei $(u_1, \dots, u_r)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann ist $r \leq n$, und man findet Indizes $i_{r+1}, \dots, i_n$, so daß $(u_1, \dots, u_r, v_{i_{r+1}}, \dots, v_{i_n})$ auch eine Basis von V ist.

Folgerung und Definition 3.6. Sei V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum, dann haben alle Basen die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Anzahl nennt man die *Dimension von V* ($\dim_K V$). V heißt auch endlich-dimensional.

Satz 3.5. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. U_1 und U_2 seien Untervektorräume von V. Dann sind $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ endlich dimensionale Vektorräume und es gilt:

$$\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_k(U_1 \cap U_2).$$

Definition 3.7. Es sei V ein K-Vektorraum und V_1, V_2 seien K-Unterräume von V. V heißt *direkte Summe von* V_1 *und* V_2 (ausgedrückt als $V = V_1 \oplus V_2$), wenn $V = V_1 + V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
Induktiv definiert man die direkte Summe von Unterräumen $V_1, \ldots, V_n$ durch

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}) \oplus V_n$$

Bemerkung. Die Reihenfolge der Klammerung ist egal und es gilt: V ist genau dann direkte Summe von $V_1, \ldots, V_n$, d. h. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, wenn

$$V = V_1 + \cdots + V_n \text{ und } V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

4 Lineare Abbildungen

Wir betrachten jetzt Abbildungen, die die beiden Verknüpfungen $(+, \cdot)$ eines Vektorraums respektieren.

Definition 4.1. Es seien V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung $F : V \longrightarrow W$ heißt *linear,* wenn gilt:
a) $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$ und
b) $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$.

Eine bijektive lineare Abbildung heißt *Isomorphismus.* Ist $V = W$, so heißt eine lineare Abbildung $F : V \longrightarrow V$ *Endomorphismus.* Ein bijektiver Endomorphismus ist ein *Automorphismus.*

Wichtiges Beispiel

$V = K^n,\ W = K^m, A$ sei eine $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten aus K, d. h. $A \in M_{m \times n}(K)$, betrachte die *Standard-Abbildung zu* A:

$$\begin{aligned} A\cdot :\ & K^n \longrightarrow K^m \\ & x \longmapsto A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ & \qquad\quad\;\, = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Einige Beobachtungen

Es sei $F : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, dann gilt:
a) $F(0) = 0$,

b) $F(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n)$,
c) ist $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig, dann ist auch $(F(v_i))_{i\in I}$ linear abhängig,
d) wenn $V' \subset V$ ein Untervektorraum ist, dann ist auch $F(V') \subset W$ ein Untervektorraum,
e) wenn $W' \subset W$ ein Untervektorraum ist, dann ist auch $F^{-1}(W') \subset V$ ein Untervektorraum,
f) wenn V, W endlich dimensional sind, dann gilt $\dim_K F(V) \leq \dim_K V$,
g) wenn $F : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus ist, dann ist auch $F^{-1} : W \longrightarrow V$ linear.

Summe von linearen Abbildungen

Es seien $F, G : V \longrightarrow W$ zwei lineare Abbildungen, dann ist die Abbildung $F + G : V \longrightarrow W, v \longmapsto F(v) + G(v)$ ebenfalls linear.
$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{F : V \longrightarrow W | F \text{ linear } \}$ ist ein K-Vektorraum.

Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen

Es seien $F : V \longrightarrow W$ und $G : W \longrightarrow U$ lineare Abbildungen, dann ist die Abbildung $G \circ F : V \longrightarrow U$ ebenfalls linear.
$\mathrm{End}_K(V) := \{F : V \longrightarrow V | F \text{ linear } \}$ ist ein Ring.

Definition 4.2. Es sei $F : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, dann heißt $F(V)$ das *Bild von* F ($\mathrm{Im}\, F$) und $F^{-1}(0)$ der *Kern von* V ($\mathrm{Ker}\, F$).

Bemerkungen. Es gilt:
a) $\mathrm{Im}\, F$ ist Untervektorraum von W,
b) $\mathrm{Ker}\, F$ ist Untervektorraum von V,
c) F ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}\, F = \{0\}$.

Satz 4.1. (Dimensionssatz für lineare Abbildungen)
Sei $F : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, $\dim_K V, \dim_K W$ seien endlich. Seien $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\mathrm{Ker}\, F$ und $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\mathrm{Im}\, F$, weiterhin seien $u_i \in V$ mit $F(u_i) = w_i$.
Dann ist $(v_1, \ldots, v_k,\, u_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von V. Insbesondere gilt die Formel: $\dim_K \mathrm{Ker}\, F + \dim_K \mathrm{Im}\, F = \dim_K V$.

Korollar. $F : V \longrightarrow W$ sei linear, $\dim_K V = \dim_K W$ (endlich), dann sind äquivalent:
i) F ist injektiv,
ii) F ist surjektiv,
iii) F ist bijektiv.

Satz 4.2. Es seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Weiterhin seien $w_1 \ldots, w_n$ beliebige Elemente in W.
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : V \longrightarrow W$ mit $F(v_i) = w_i$.

Anwendung: Die Koordinatenabbildung

Es sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des K^n. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, dann ist $\phi_\mathcal{B} : K^n \longrightarrow V$ der eindeutig bestimmte Isomorphismus mit $\phi_\mathcal{B}(e_i) = v_i$. Also:

$$\phi_\mathcal{B}(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Wichtig: Diese Abbildung hängt von der Basis $\mathcal{B}$ ab!

Lineare Abbildungen und Matrizen

Satz 4.3. Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$, und es sei W ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$.
Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $F : V \longrightarrow W$ genau eine Matrix $M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F) = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, so daß

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n\ .$$

Zusammenhang von $M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F), \phi_\mathcal{A}, \phi_\mathcal{B}$ und F

Satz 4.4. Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & W \\ K^n \arrow[u, "\phi_\mathcal{A}"] \arrow[r, "M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F)\cdot"'] & K^m \arrow[u, "\phi_\mathcal{B}"'] \end{tikzcd}$$

dabei ist $M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F)\cdot$ die Standard-Abbildung zur Matrix $M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F)$. Mit anderen Worten: es gilt $F \circ \phi_\mathcal{A} = \phi_\mathcal{B} \circ M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F)\cdot$.

Merkregel. In der i-ten Spalte von $M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F)$ steht das Bild des Basisvektors v_i ausgedrückt mittels der Basis $(w_1, \ldots, w_m)$.

Definition 4.3. (Produkt von Matrizen) Betrachte die Standard-Abbildungen

$$K^n \xrightarrow{B\cdot} K^r \quad \text{und} \quad K^r \xrightarrow{A\cdot} K^m$$

wobei

$$\begin{aligned} A \in M_{m\times r}(K), &\quad A = (a_{il})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,r}} \\ B \in M_{r\times n}(K), &\quad B = (b_{lj})_{\substack{l=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,n}} \end{aligned}$$

und schließlich die Hintereinanderausführung

$$(A\cdot)\circ(B\cdot):K^n\longrightarrow K^m\ .$$

Berechne von dieser linearen Abbildung jeweils bezüglich der Standardbasen die Matrix

$$M_{st}^{st}\Big((A\cdot)\circ(B\cdot)\Big)=C(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

und *definiere* diese Matrix als das *Produkt* von A mit B (in dieser Reihenfolge!)

$$C=A\cdot B\ .$$

Man berechnet dann die Koeffizienten c_{ij} durch die Formel

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{r}a_{il}b_{lj}\quad\text{für alle}\quad i=1,\dots,m\ ,\ j=1,\dots,n.$$

Definition 4.4. Sei $A\in M_{m\times n}(K)$ mit $A=(a_{ij})$, dann definiert man $A^T=(b_{ji})\in M_{n\times m}(K)$ mit $b_{ji}=a_{ij}$ als *transponierte* Matrix.

Satz 4.5. (Rechenregeln)
Für $A,A'\in M_{m\times n}(K)$, $B,B'\in M_{n\times r}(K)$, $C\in M_{r\times s}(K)$, $\lambda\in K$ gelten folgende Regeln:
a) $A\cdot(B+B')=A\cdot B+A\cdot B'\ ,\ (A+A')\cdot B=A\cdot B+A'\cdot B$,
b) $A\cdot(\lambda B)=(\lambda A)\cdot B=\lambda(A\cdot B)$,
c) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$,
d) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$,
e) sei $E_n=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\in M_{n\times n}(K)$, dann: $E_n\cdot A=A$ und $A\cdot E_n=A$.

Weitere direkte Folgerungen aus der Definition des Matrizenproduktes

Es seien V,W,U K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ und es seien $F:V\to W$ und $G:W\to U$ lineare Abbildungen, dann gilt $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(G\circ F)=M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(G)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$.

Folgerung aus Satz 4.5. Es gilt:
a) $M_{n\times n}(K)$ ist ein Ring bzgl. $+,\cdot$.
b) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, dann ist $M_{n\times n}(K)$ isomorph zum Ring $\mathrm{End}_K(V)$. Der Isomorphismus hängt von der Wahl einer Basis in V ab.

Einige Bezeichnungen

Eine Matrix $A\in M_{n\times n}(K)$ heißt *invertierbar,* wenn es ein $A'\in M_{n\times n}(K)$ gibt mit $A\cdot A'=A'\cdot A=E_n$.
Die Menge $GL(n,K)=\{A\in M_{n\times n}(K), A \text{ invertierbar}\}$ ist eine Gruppe (bzgl. $\cdot$) und heißt *allgemeine lineare Gruppe.*

Basiswechsel

Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. $\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}}$ seien Basen von V und $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ seien Basen von W, dann gilt

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{A}}}(F) = M_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}(id_W) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mathcal{A}}}(id_V).$$

Bemerkung. Elementare Zeilen- bzw. Spaltenoperationen von Matrizen lassen sich durch Basiswechsel erklären.

Anwendung: Berechnung der Inversen einer Matrix A

Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix, d. h. $A \cdot A^{-1} = E_n$. Bringe A durch eine Folge elementarer Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix E_n, d. h.

$$(Z_k \cdot \ldots \cdot Z_2 Z_1) \cdot A = E_n \, .$$

Wende dieselben Zeilenumformungen auf E_n an, so erhält man A^{-1}, *denn:*

$$A^{-1} = (Z_k \cdot \ldots \cdot Z_1) \cdot A \cdot A^{-1} = (Z_k \cdot \ldots \cdot Z_1) \cdot E_n.$$

Definition 4.5. Zwei Matrizen $A, B \in M_{m \times n}(K)$ heißen *äquivalent,* wenn es $S \in GL(m, K)$ und $T \in GL(n, K)$ gibt mit

$$A = S \cdot B \cdot T \, .$$

Definition 4.6. Zwei Matrizen $A, B \in M_{n \times n}(K)$ heißen *ähnlich* , wenn es $S \in GL(n, K)$ gibt mit

$$A = S \cdot B \cdot S^{-1} \, .$$

Anwendung: Rang von Matrizen

Definition 4.7. Sei $A \in M_{m \times n}(K)$. Der *Zeilenrang von A* ist die Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Unterraums des K^n.
Der *Spaltenrang von A* ist die Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Unterraums des K^m.

Bemerkung. Es gilt:
a) Zeilenrang (A) = Spaltenrang (A^T).
b) Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Zeilenrang und elementare Spaltenumformungen ändern ebenfalls nicht den Spaltenrang.

Satz 4.6. Sei $A \in M_{m \times n}(K)$. Dann gilt:
a) Der Spaltenrang von A ist gleich der Dimension des Bildes von $A\cdot : K^n \to K^m$.
b) Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Spaltenrang von A (und analog Spaltenumformungen ändern nicht den Zeilenrang).

c) Der Spaltenrang von A ist gleich dem Zeilenrang von A, diesen nennt man *Rang von A.*

Satz 4.7. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$, dann gilt: A ist genau dann invertierbar, wenn Rang $(A) = n$.

Lineare Gleichungssysteme und lineare Abbildungen

Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &\quad + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 &\quad + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{*}$$

und forme um:

$$A = (a_{ij}) \ , \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \ , \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

dann ist (*) äquivalent zu

$$A \cdot x = b,$$

d. h. die Lösungen von (*) sind gerade die Urbilder von b unter der linearen Abbildung $A\cdot$, deshalb gilt:

Satz 4.8. (*) ist genau dann lösbar, wenn Rang $(A) =$ Rang $(A\,b)$.

Satz 4.9. (Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems)
i) Sei x_0 irgendeine Lösung von $A \cdot x = b$, dann gilt:
(Lösungsmenge von $Ax = b$) $= x_0 +$ (Lösungsmenge von $Ax = 0$).
ii) Die Lösungsmenge von $Ax = 0$ ist gerade der Kern der linearen Abbildung $A\cdot : K^n \to K^m$.

Zusammenhang mit dem Gauß-Algorithmus (1. Abschnitt)

Sei r die Anzahl der Sprungstellen im Gauß-Algorithmus, dann ist r gleich dem Rang von A. Die Anzahl der freien Variablen ist $n - r$ und dies ist gleich der Zahl $\dim_K \operatorname{Ker}(A\cdot)$. All diese Zahlen sind unabhängig von der speziellen Form des Gauß-Algorithmus.

Faktorvektorräume und Homomorphiesätze

Definition 4.8. Sei M eine Menge und $\sim$ eine Relation auf M (genauer: Es sei $R \subset M \times M$ und $x \sim y$ bedeute gerade $(x, y) \in R$), $\sim$ heißt *Äquivalenzrelation,* wenn gilt:
i) für alle $x \in M$ ist $x \sim x$,
ii) aus $x \sim y$ folgt immer $y \sim x$,
iii) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt immer $x \sim z$.

Unter der *Äquivalenzklasse von* x versteht man die Menge $\overline{x} = \{y \in M | y \sim x\}$.

Bemerkung. Für $x, y \in M$ gilt $\overline{x} = \overline{y}$ oder $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

Definition 4.9. und Satz 4.9. Es sei V ein K-Vektorraum und es sei $U \subset V$ ein Unterraum, man betrachte folgende Relation $\sim_U$ auf V:

$$v \sim_U w \text{ genau dann, wenn } v - w \in U.$$

Es ist $\sim_U$ eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen sei mit V/U bezeichnet. Durch die Festlegungen

$$\begin{aligned} \overline{v_1} + \overline{v_2} &:= \overline{v_1 + v_2} \text{ für } v_1, v_2 \in V, \\ \lambda \cdot \overline{v} &:= \overline{\lambda v} \text{ für } \lambda \in K, v \in V \end{aligned}$$

wird V/U zu einem K-Vektorraum, dem *Faktorvektorraum von* V *nach* U (manchmal auch Quotientenvektorraum genannt). Die Abbildung $\pi : V \to V/U$ mit $v \mapsto \overline{v}$ ist eine lineare Abbildung, sie heißt *kanonische Faktorabbildung.* π ist surjektiv und $\operatorname{Ker} \pi = U$.
Falls $\dim_K V$ endlich ist, gilt $\dim_K(V/U) = \dim_K V - \dim_K U$.

Satz 4.10. (Universelle Eigenschaft des Faktorvektorraums)
Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, es sei U ein Unterraum von V mit $U \subset \operatorname{Ker} F$, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{F} : V/U \to W$ mit $F = \overline{F} \circ \pi$.

Satz 4.11. (1. Isomorphiesatz)
Sei $F : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, dann ist $\overline{F} : V/\operatorname{Ker} F \to \operatorname{Im} F$ mit $\overline{v} \mapsto F(v)$ ein K-Isomorphismus.

Satz 4.12. (2. Isomorphiesatz)
Seien U_1, U_2 Unterräume eines K-Vektorraums V, dann gilt: $U_2/(U_1 \cap U_2)$ ist isomorph zu $(U_1 + U_2)/U_1$.

Satz 4.13. (3. Isomorphiesatz)
Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume eines K-Vektorraumes V mit $U_3 \subset U_2 \subset U_1$, dann gilt: U_1/U_2 ist isomorph zu $(U_1/U_3)/(U_2/U_3)$.

5 Determinanten

Definition 5.1. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$, dann heißt eine Abbildung $\det : M_{n \times n}(K) \to K$ *Determinante,* wenn sie folgende drei Eigenschaften erfüllt:

i) det ist linear in jeder Zeile, d. h.

$$\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ \tilde{Z}_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_i + \tilde{Z}_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und alle Zeilen $Z_i, \tilde{Z}_i$ und

$$\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \lambda Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

für alle $i = 1, \dots, n$, alle Zeilen Z_i und alle $\lambda \in K$.
ii) det ist alternierend, d. h. hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.
iii) det ist normiert, d. h. $\det E_n = 1$.

Satz 5.1. Sei $\det : M_{n\times n}(K) \to K$ eine Determinante, dann gelten folgende Eigenschaften:
1) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$ für alle $\lambda \in K,\ A \in M_{n\times n}(K)$;
2) ist eine Zeile von A gleich der Nullzeile, dann $\det A = 0$;
3) $\det\begin{pmatrix} \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \end{pmatrix}$ (Zeilenvertauschung);
4) $\det\begin{pmatrix} \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_j + \lambda \cdot Z_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \end{pmatrix}$ für $i \neq j$;
5) für eine „obere Dreiecksmatrix“ $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ gilt

$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \lambda_n$;

6) ist $n \geq 2$ und $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, wobei A_1, A_2 quadratisch sind, dann gilt $\det A = (\det A_1) \cdot (\det A_2)$;
7) $\det A = 0$ ist äquivalent zu Rang $(A) < n$;
8) $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$ für alle $A, B \in M_{n\times n}(K)$.

Exkurs über Permutationen

Definition 5.2. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist S_n, *die symmetrische Gruppe auf* $\{1, \dots, n\}$, gleich der Menge aller bijektiven Abbildungen von $\{1, \cdots, n\}$ in sich mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Die Elemente von S_n heißen *Permutationen.*

Lemma 5.1. $|S_n| = n!$

Definition 5.3. Ein $\tau \in S_n$ heißt *Transposition,* wenn es Indizes $1 \leq k \neq l \leq n$ gibt mit $\tau(k) = l, \tau(l) = k$ und $\tau(i) = i$ für alle $i \neq k, i \neq l$.

Lemma 5.2. Sei $n \geq 2$; zu jedem $\sigma \in S_n$ gibt es Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_r \in S_n$ mit $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$ (beachte: die τ_i sind nicht eindeutig bestimmt).

Definition 5.4. Sei $\sigma \in S_n$, jedes Paar (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ heißt *Fehlstand von* σ. Das *Signum* von σ ist definiert als

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma}.$$

Lemma 5.3. Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\operatorname{sign} \sigma = \prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,n\} \\ \text{mit } i<j}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Satz 5.2. Für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ gilt: sign $(\sigma_1 \cdot \sigma_2) =$ (sign σ_1)(sign σ_2),
d. h. sign $: S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus;

Korollar. 1) Für eine Transposition $\tau \in S_n$ gilt sign $\tau = -1$.
2) Ist $\sigma \in S_n$ und $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_r$ Produkt von r Transpositionen, dann gilt sign $\sigma = (-1)^r$.

Zurück zur Determinante

Satz 5.3. (Existenz und Eindeutigkeit der Determinante)
Sei K ein Körper und sei $n \geq 1$, dann gibt es genau eine Determinante $\det : M_{n\times n}(K) \to K$. Diese wird so gegeben: Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$, dann

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sign} \sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Satz 5.4. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$, dann gilt: $\det A = \det A^T$.

Dritte Berechnungsmethode der Determinate: Die Entwicklung

Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$, dann sei $A_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(K)$ die Matrix, die man erhält, wenn man von A die i-te Zeile und die j-te Spalte wegstreicht (Streichungsmatrix).

Satz 5.5. (Entwicklungssatz)
Sei $A \in M_{n\times n}(K)$, dann gilt für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ (Entwicklung nach der i-ten Zeile):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

und für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$ (Entwicklung nach der j-ten Spalte):

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}.$$

Satz 5.6. („Alternative Berechnung“ der Inversen)
Sei $A \in M_{n\times n}(K)$, so betrachte man die *komplementäre Matrix* $\widetilde{A} = (\widetilde{a_{ij}})$ mit $\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}$. Dann gilt: $\widetilde{A} \cdot A = (\det A) \cdot E_n$.
Wenn A invertierbar ist, folgt hieraus $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \widetilde{A}$.

Rechenaufwand der Verfahren

Sei A eine (allgemeine) $n \times n$-Matrix über K. Eine Addition bzw. eine Multiplikation in K habe den Zeitaufwand μ. Dann haben die drei Berechnungsmethoden folgenden Aufwand:
1) $\det A$ (nach Gauß) $\approx \frac{2}{3} n^3 \mu$,
2) $\det A$ (mit Formel) $\geq n! \cdot \mu$,
3) $\det A$ (Entwicklung) $\geq n! \cdot \mu$.

Beispiel. $n = 100$, $\mu = 10^{-6}$ sec, dann $\det A$ (nach Gauß) $\approx 0,4$ sec und $\det A$ (Formel oder Entwicklung) $\geq 10^{143}$ Jahre.

Determinante und Spur von Endomorphismen

Definition 5.5. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei F ein Endomorphismus von V. Sei weiterhin $\mathcal{B}$ eine Basis von V und sei $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = (m_{ij})$ die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\mathcal{B}$. Dann bezeichnet man als *Determinante* von F ($\det F$) das Körperelement $\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ und als *Spur* von F (Spur F) das Körperelement $\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

Satz 5.7. Die Determinante von F ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}$.

Bemerkung. Bezeichnet man für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$ das Element $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ als Spur$A$, so gilt für $A, B \in M_{n\times n}(K)$ die Formel $\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$.

Satz 5.8. Die Spur von F ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.

Satz 5.9. (Eigenschaften von det und Spur)
Seien $F, G : V \to V$ Endomorphismen von V, dann gilt:
1) $\det(F \circ G) = (\det F) \cdot (\det G)$,
2) $\det(F \circ G) = \det(G \circ F)$,
3) $\det(id_V) = 1$,
4) $\det(F) \neq 0$ genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist,
5) Spur: $\mathrm{End}_K(V) \to K$ ist linear,
6) $\mathrm{Spur}(F \circ G) = \mathrm{Spur}(G \circ F)$.

6 Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen

Definition 6.1. Sei F ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V. Ein Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ heißt *Eigenvektor* zum *Eigenwert* $\lambda \in K$, wenn $F(v) = \lambda \cdot v$.

Definition 6.2. Ein Endomorphismus F von V heißt *diagonalisierbar,* wenn V eine Basis besitzt, die aus Eigenvektoren von F besteht.

Bemerkung. Sei $\dim_K V = n < \infty$. Dann ist F genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ gibt mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{(Diagonalmatrix).}$$

Satz 6.1. Es sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$, und es seien $v_1, \ldots, v_m$ Eigenvektoren von F zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Dann sind $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig.

Korollar. Sei $\dim_K V = n$. Wenn F paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1. \ldots, \lambda_n$ hat, dann ist F diagonalisierbar.

Definition 6.3. Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und sei $\lambda \in K$, dann bezeichnet man $V(F, \lambda) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda \cdot v\}$ als den *Eigenraum* von F zu λ.

Bemerkungen. i) $V(F, \lambda)$ ist Untervektorraum von V,
ii) $V(F, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der Eigenvektoren von F zum Eigenwert λ,
iii) $V(F, \lambda) = \mathrm{Ker}\,(F - \lambda \cdot id_V)$.

Lemma 6.1. Es sei $\dim_K(V) = n < \infty$ (dies setzen wir ab jetzt immer voraus), sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und sei $\lambda \in K$, dann sind äquivalent:

i) λ ist Eigenwert von F,
ii) $\det(F - \lambda \cdot id_V) = 0$.

Definition 6.4. Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und sei $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ die Darstellungsmatrix zu F bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V. Man betrachte die Matrix $A - X \cdot E_n$ mit der Unbestimmten X (oder genauer über dem Ring $K[X]$). Dann heißt $\chi_F(X) = \det(A - X \cdot E_n)$ das *charakteristische Polynom* von F.

Bemerkung. $\chi_F(X)$ ist ein Element in $K[X]$ und unabhängig von der Basis $\mathcal{B}$.

Satz 6.2. Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$, dann gilt:
$\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von F, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_F(X)$ ist.

Etwas über Polynome

Wir betrachteten $K[X] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in K \right\}$ bisher als Vektorraum über dem Körper K. Neben der (Vektorraum-) Addition und der Skalarmultiplikation gibt es auch eine Multiplikation in $K[X]$, man definiert (distributiv): seien $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ und $g(X) = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ Polynome aus $K[X]$, dann ist das Produkt gegeben durch

$$f(X) \cdot g(X) = \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j+k=i} a_j \cdot b_k \right) X^i \,.$$

Dadurch wird $K[X]$ zu einem Ring, dem *Polynomring* über K.
Sei $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ mit $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von $f(X)(n = \mathrm{grad}\ f(X))$.
Wir setzen $\mathrm{grad}\ 0 = -\infty$.

Es gilt: 1) $\mathrm{grad}\ (f(X) + g(X)) \leq \mathrm{Max}(\mathrm{grad}\ f(X), \mathrm{grad}\ g(X))$,
2) $\mathrm{grad}\ (f(X) \cdot g(X)) = \mathrm{grad}\ f(X) + \mathrm{grad}\ g(X)$.

In dem Polynomring kann man mit *„Rest dividieren“:*
Es gilt: Seien $f(X), g(X) \in K[X]$ mit $g(X) \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q(X), r(X) \in K[X]$ mit $f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X)$ und $\mathrm{grad}\ r(X) < \mathrm{grad}\ g(X)$.

Es gilt: Sei $f(X) \in K[X]$ und $a \in K$, dann ist a genau dann Nullstelle von $f(X)$, wenn $(X - a)$ das Polynom $f(X)$ teilt (d. h. wenn $f(X) = q(X) \cdot (X - a)$ mit einem $q(X) \in K[X]$).
Ist $f(X) \in K[X]$ und $a \in K$ und gilt $f(X) = (X - a)^m \cdot g(X)$ mit $g(X) \in K[X], g(a) \neq 0$, so heißt m die *Vielfachheit der Nullstelle* a in $f(X)$ (Vielfachheit 0 bedeutet dabei, daß keine Nullstelle vorliegt.) Diese Vielfachheit bezeichnen wir mit $m = \mu(f(X), a)$.

Es gilt: Jedes Polynom $f(X)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat im Körper K höchstens n Nullstellen (mit Vielfachheit).

Man beobachtet bei folgenden Körpern:
1) $K = \mathbb{Q}$: Es gibt Polynome beliebigen Grades, die keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ haben, z. B. $X^2 - 2$, $X^2 + 1$, $X^3 + 3$, $X^n + 5$.
2) $K = \mathbb{R}$: Jedes Polynom ungeraden Grades hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ (Zwischenwertsatz der Analysis), $X^2 + 1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
3) $K = \mathbb{C}$: Jedes Polynom hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ („ Fundamentalsatz der Algebra “).

Folgendes Kriterium ist beim Suchen von Nullstellen manchmal hilfreich:
Es gilt: Sei $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$ ein normiertes Polynom mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, und sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von $f(X)$. Dann gilt: $\alpha \in \mathbb{Z}$ und α teilt den „konstanten Koeffizienten“ a_0.

Zurück zum charakteristischen Polynom

Satz 6.3. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$, dann ist das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = \det(A - X \cdot E_n)$ ein Polynom vom Grad n:

$$\chi_A(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

mit $a_n = (-1)^n,\ a_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Spur}A,\ a_0 = \det A$.

Bemerkung. Sei $f(X) = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0) \in K[X]$ mit beliebigen Elementen $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in K$, dann gibt es ein $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $\chi_A(X) = f(X)$, nämlich

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & -a_{n-3} \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Lemma 6.2. Sei $\dim_K V = n$ und $F \in \mathrm{End}_K(V)$, dann gilt: Ist F diagonalisierbar, so zerfällt das charakteristische Polynom von F in Linearfaktoren, d. h. $\chi_F(X) = (-1)^n(X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in K$.

Andererseits wissen wir bereits von dem Korollar zu Satz 6.1:
Ist $\chi_F(X) = (-1)^n(X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n)$ ein Produkt von *verschiedenen* Linearfaktoren, dann ist F diagonalisierbar. Wie sieht es mit mehrfachen Linearfaktoren aus?

Lemma 6.3. Sei λ Eigenwert von F, so gilt: $1 \leq \dim_K V(F, \lambda) \leq \mu(\chi_F(X), \lambda)$.

Satz 6.4. Sei $\dim_K V = n$, $F \in \mathrm{End}_K(V)$, dann sind äquivalent:
i) F ist diagonalisierbar,
ii) $\chi_F(X)$ zerfällt in Linearfaktoren und $\dim_K V(F, \lambda) = \mu(\chi_F(X), \lambda)$ für alle Eigenwerte λ von F,

iii) sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von F, so ist $V = V(F, \lambda_1) \bigoplus \cdots \bigoplus V(F, \lambda_k)$.

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$, dann können wir F in ein Polynom einsetzen: Sei $f(X) = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$, dann bezeichne $f(F)$ den Endomorphismus $a_m F^m + a_{m-1}F^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathrm{End}_K(V)$.

Satz 6.5. (Satz von Cayley-Hamilton)
Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und sei $\chi_F(X)$ das charakteristische Polynom von F, dann gilt: $\chi_F(F) = 0$.

Bemerkung und Definition 6.5. Es gibt genau ein normiertes Polynom kleinsten Grades $m_F(X) \in K[X]$ mit $m_F(F) = 0$. Dieses heißt *Minimalpolynom* von F.

Satz 6.6. Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann wird jedes Polynom $f(X) \in K[X]$ mit der Eigenschaft $f(F) = 0$ vom Minimalpolynom $m_F(X)$ geteilt. Insbesondere ist das Minimalpolynom $m_F(X)$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_F(X)$.

Zusatz. Minimalpolynom und charakteristisches Polynom haben dieselben Nullstellen in K.

Bemerkung. Eigenwerte und Eigenvektoren spielen eine wichtige Rolle beim Lösen von linearen Differentialgleichungssystemen.