Ansatzes mehrfach verdeutlicht, der darin besteht, daß man in der Ziffernfolge einer einzigen reellen Zahl kompliziert zu berechnende Information speichern und als Konstante einer Maschine zur Verfügung stellen kann.

Kap. 16 beginnt mit der Betrachtung algebraischer Berechnungsbäume. Für die Tiefe solcher Bäume wird eine logarithmische untere Schranke in der Zahl der reellen Zusammenhangskomponenten einer zu erkennenden Menge hergeleitet. Kap. 17 widmet sich probabilistischen Maschinen. Es wird gezeigt, daß über $\mathbf{R}$ die Klasse der fehlerbeschränkten probabilistischen Polynomialzeit-Maschinen mit der Klasse der deterministischen Polynomialzeit-Maschinen zusammenfällt, wobei die in einer einzigen reellen Konstanten kodierbare "richtige" Zufallswahl eine Rolle spielt.

Kap. 18 erweitert das bisherige uniforme Modell zu dem einer uniformen parallelen Maschine, in der eine abzählbare Anzahl bisheriger Maschinen über eine Aktivierungsfunktion, Kommunikationsknoten und einen gemeinsamen Takt zusammenwirken. In dem Zusammenhang werden neue Komplexitätsklassen PL (parallele polylogarithmische Zeit) und PAR (parallele polynomiale Zeit) untersucht, $NP_{\mathbf{R}} \subseteq PAR_{\mathbf{R}}$ gezeigt sowie der Zusammenhang mit algebraischen Schaltkreisfamilien und den Klassen NC beschrieben.

Kap. 19 widmet sich der genaueren Abgrenzung zwischen diesen verschiedenen Klassen. Die entscheidenden Beispiele ergeben sich dabei wieder aus unteren Abschätzungen von Parametern verschiedener reeller Nullstellengebilde. Schließlich wird der Begriff der $P_{\mathbf{R}}$-Vollständigkeit (bzgl. polylogarithmischer Reduzierbarkeit) untersucht, um genauere Aussagen über $P_{\mathbf{R}}$-Probleme, die nicht in $NC_{\mathbf{R}}$ liegen, zu erhalten. Insbesondere ist (KP) ein solches Problem.

Kap. 20 untersucht Maschinen, in deren Kostenfunktion Multiplikationen besonders berücksichtigt werden (weak machines). Für diese gilt $P_W \neq NP_W = NP_{\mathbf{R}}$, womit sie für die Frage $P_{\mathbf{R}} = NP_{\mathbf{R}}$? interessant sind. Kap. 21 ist additiven Maschinen gewidmet, d.h. solchen, die keine Multiplikationen/Divisionen enthalten. Die Möglichkeit, in einzelnen reellen Zahlen umfangreiche Information zu kodieren, erlaubt es, derartige Maschinen durch solche mit konstantem Speicher zu simulieren. Weiter wird die polynomiale Hierarchie und ihr digitales Gegenbild untersucht und in Beziehung zueinander gestellt. Im Kap. 22 werden schließlich nichtuniforme Komplexitätsklassen, die durch algebraische Schaltkreisfamilien mit polynomial wachsender Größe beschrieben werden, untersucht, während Kap. 23 dem Begriff der deskriptiven Komplexität gewidmet ist.

"Real Computation" wird in diesem Buch also im doppelten Sinne des Wortes entwickelt, nämlich zum einen im Kontext einer Komplexitätstheorie, die reelle Zahlen (und allgemeiner Elemente eines Rings oder Körpers) nicht als dezimale Approximation, sondern als begriffliche Grundeinheit betrachtet, und zum anderen im Sinne von numerischen, also auf das Rechnen mit "wirklichen" reellen Zahlen gerichteten Methoden. Beides unter einen Hut zu bringen ist aus den eingangs dargelegten Gründen außerordentlich schwierig. Das vorliegende Buch arbeitet die wichtigsten Ansätze, die dabei im Rahmen der Übertragung von Ideen der klassischen und algebraischen Komplexitätstheorie bisher entwickelt wurden, monographisch auf. Der Klappentext schließt mit den Worten: "All those interested in questions of complexity and decidability will find this to be a path-breaking monograph into one of the most active areas of current research. It is written, however, so that it can be used as a textbook at the advanced undergraduate or graduate level in either a mathematics or a computer science department." Dem ist nichts hinzuzufügen.

Hans-Gert Gräbe (Leipzig)

• Koepf, W., Hypergeometric Summation. An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities

Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1998, ISBN 3-528-06950-3, DM 69,00.

Aufgaben wie die explizite oder rekursive Auswertung von Summen von Binomialkoeffizienten (allgemeiner: hypergeometrischen Termen) oder der Nachweis der Gleichheit von solchen Summen (Binomialidentitäten) treten in vielen Bereichen der Mathematik auf und haben in der Vergangenheit auch erfahrenen "Rechnern" notorische Probleme bereitet. Seit etwas weniger als zehn Jahren hat die Behandlung dieses Problems der definiten hypergeometrischen Summation, beginnend mit den Arbeiten von Doron Zeilberger, eine neue, algorithmische Qualität gewonnen. Vieles, wofür man früher Erfahrung, Intelligenz, Hartnäckigkeit, Tafeln von bekannten Auswertungen und Transformationen und auch Glück benötigte, kann nun "automatisch", also algorithmisch, erledigt werden. Protagonisten dieser raschen Entwicklung waren neben Zeilberger u.a. Herbert Wilf und Marko Petkovsek, und diese drei Autoren haben in dem 1996 erschienenen Buch mit dem vielsagenden (?) Titel "A=B" (A.K. Peters, Wellesley) eine erste zusammenfassende Darstellung gegeben, die neben anderen Qualitäten auch den authentischen Charme der Pionierarbeit hat.

Das vorliegende Buch von W. Koepf, der vor allem auch durch seine Implementierungen zur Verbreitung dieses Fortschritts beigetragen hat, deckt in der mathematisch-algorithmischen Substanz in etwa den gleichen Themenkreis wie "A=B" ab. Die Basisalgorithmen (also die Technik von Sister Celine, Gospers Methode der indefiniten hypergeometrischen Summation, der WZ-Ansatz, Zeilbergers kreatives Teleskopieren, die Bestimmung der hypergeometrischen Lösungen von linearen Differenzengleichungen mit polynomialen Koeffizienten nach Petkovsek) werden ausführlich behandelt. Viele Varianten und Erweiterungen (Mehrfachsummen, q-Analoga, Faktorisierungen von Operatoren, analoge Techniken für Integrationsprobleme etc.) werden in unterschiedlichem Detaillierungsgrad angesprochen, so wie das für einen Text mit dieser Ausrichtung sinnvoll und angemessen ist.

Was dieses Buch auszeichnet, ist einerseits die jederzeit greifbare Nähe zur konkreten (Maple-)Implementierung, andererseits die Fülle von Beispielen, Anwendungen und Aufgaben, wobei der Verfasser, mehr noch als die Autoren von "A=B", auf den riesigen Fundus von Anwendungsmöglichkeiten im Bereich der "speziellen Funktionen" (im Sinne von Sektion 33 der Mathematical Reviews) zurückgreift.

Es war die ausgesprochene Absicht des Verfassers, einen Text vorzulegen, der als Basis von Seminaren oder Vorlesungen den Einstieg in diesen faszinierenden Bereich der Computeralgebra motiviert und unterstützt. Das ist ihm, so meine ich, rundum gelungen.

Bem.: Revidierte Versionen der Maple packages "hsum.mpl" und "qsum.html" mit Implementierungen der in diesem Buch behandelten Algorithmen sind auf der web-Seite `www.imn.htwk-leipzig.de/~koepf/research.html` zu finden.

Volker Strehl (Erlangen)

- **Monogan M.B., Geddes K.O., Heal K.M., Labahn G., Vorkoetter S.M., Maple V Programming Guide**

Verlag Springer, New York - Berlin - Heidelberg, ISBN 0-387-98398-8, SPIN 10660030, 1998, 379 Seiten.

Das vorliegende Buch in englischer Sprache wendet sich an alle User des Computeralgebra-Systems Maple V Release 5, und zwar unabhängig davon, ob der Leser vor der Lektüre Maple nur interaktiv betrieben oder bereits selbst Maple-Programme geschrieben hat. Auch neue User von Maple V, die zuvor in anderen Sprachen (C, C++, Fortran, ...) programmiert haben, werden durch dieses Buch leicht in die Welt der Maple-Programmierung finden.

Vom Aufbau her ist das Werk gehalten wie viele andere Einführungen in div. Programmiersprachen auch. Im ersten Abschnitt wird die grundlegende Bedienung von Maple V vorgestellt, u.a. verschiedene Datentypen (Mengen, Listen, ...) aber auch schon Schleifenstrukturen (for, while,...). Ebenso wird die Erstellung von Kleinprogrammen (Funktionen) gezeigt. In Kapitel 2 (Fundamentals) wird sehr ausführlich auf verschachtelte Strukturen und die Verwendung von globalen bzw. lokalen Variablen eingegangen. Häufige Irrtümer werden an Beispielen demonstriert und gleich die korrekte Lösung angegeben. Die Kapitel 3 (Advanced Programming) - 7 (Numerical Programming in Maple) widmen sich dann ganz der fortgeschrittenen Programmierung von Maple, wobei großer Wert auf Vollständigkeit gelegt wird. Alle vorgestellten Konzepte und Befehle werden stets an Beispielen erläutert. Das Kapitel 8 (Programming with Maple Graphics) beschäftigt sich mit der Visualisierung von Sachverhalten durch Grafiken bzw. Animationen mittels der mächtigen Maple V Grafikbefehle. Den Abschluss des Buches bildet Kapitel 9 (Input and Output), in dem auf die verschiedenen Möglichkeiten eingegangen wird, wie Maple mit anderen Anwendungen Daten austauschen kann.

Vom Layout her ist das Buch etwas eintönig, vielleicht auch weil für meinen Geschmack der Grafikteil etwas zu kurz gekommen ist. Trotzdem ist es übersichtlich aufgebaut und gegliedert, sodass man im Notfall durch Nachschlagen schnell diejenigen Themen findet, zu denen man Hilfe und Informationen benötigt. Immer wieder eingestreute Übungen fordern zu aktiver Anwendung des Gelesenen auf, sodass der Lernerfolg stets auch gleich überprüft werden kann.

Zusammenfassend kann man sagen, dass das vorliegende Buch eine sehr gründliche Einführung in das Programmieren mit Maple V darstellt, die teilweise weit über die einfache Einführung hinausgeht. Es handelt sich um ein Buch, das in keiner Bibliothek fehlen sollte, soferne man sich mit der Programmierung von Maple beschäftigt.

Werner Cyrmon (Bad Fischau, Österreich, `w.cyrmon@htlwrn.ac.at`)

- **Werner, W., Mathematik lernen mit Maple** mit CD

dpunkt, Heidelberg, ISBN 3-920993-94-2, 2. Auflage, 1998, pp. 633, 68 DM.

Erstaunlicherweise hat dieses Buch denselben Titel wie das im Rundbrief Oktober 1997 von mir besprochene. Es handelt sich jedoch um den zweiten Teil des damals besprochenen Werks.

Im vorliegenden Buch werden folgende Themen bearbeitet: 1. Integralrechnung (Unbestimmtes und bestimmtes Integral; Integrationstechniken; Spezielle Integrale; Anwendungen der Integralrechnung); 2. Differentialgleichungen (Gewöhnliche Differentialgleichungen; Lösungstechniken; Numerische Lösung; Partielle Differentialgleichungen); 3. Lineare Algebra (Vektoren, Matrizen; Lineare Gleichungssysteme; Numerische Lösung; Determinanten; Eigenwerte und Eigenvektoren; Ausgleichsrechnung).

Wie der erste Band ist auch dieses Buch vor allem für den Einsatz im Rahmen des Ingenieurstudiums gedacht mit einer besonderen Betonung numerischer Verfahren. Wieder wird Maple als Rechenhilfe eingesetzt, und es gelingt dem Autor, den Stoff durch gelungene Beispiele anzureichern.

Beispielsweise wird ausgeführt, daß die übliche $\tan(x/2)$-Integral-Substitution häufig unstetige Resultate erzeugt, für die dann natürlich der Hauptsatz der Differential- und Integralrechung nicht mehr gilt, und daß auch Maple diesen Defekt hat, z. B.

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan(x/2)\right) .$$

Über dieses Thema gab es in den letzten Jahren ja einen erheblichen Disput mit Alternativvorschlägen, und in DERIVE ist dies beispielsweise inzwischen behoben und es werden stetige Stammfunktionen berechnet:

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sin x}{\cos x+\sqrt{3}+2}\right) .$$

Es findet sich eine schöne Variante einer Kurvendiskussion in Zeiten der Computeralgebra: Hier wird eine Funktion betrachtet, die durch ein Integral gegeben ist, das sich aber nicht elementar integrieren läßt. Dennoch können die wesentlichen Eigenschaften der Funktion bestimmt werden.

Der Stoff wird vom Autor zurecht mit einer numerischen Brille betrachtet, aber er hat stets auch ein Auge für interessante symbolische Fragestellungen. Es werden Animationen durchgeführt, Unterschriften durch Splines dargestellt,