579.30013

Koepf, Wolfram

Extrempunkte und Stuetzpunkte in Familien nicht-verschwindender schlichter Funktionen. (German)

Complex Variables (to appear)

In dieser Arbeit werden Familien von analytischen Funktionen der Einheitskreisscheibe mit der Normierung $f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$, $f(z) \neq 0$ in betrachtet. Sei N_0 die Menge derartiger Funktionen. Sind f und g in N_0, so heisst f subordiniert zu g (in Zeichen $f \prec g$), wenn $f = g \circ \omega$ fuer eine durch 1 beschraenkte analytische Funktion ω ist. Ist g ferner injektiv, so ist $f \prec g$ genau dann, wenn f() $\subset g()$. Subordination $\prec$ gibt eine Halbordnung auf N_0, wenn man Funktionen f und ihre Drehungen f(xz), $x \in \partial$ identifiziert. Bezeichne Max F die Menge der maximalen Elemente von F bzgl. $\prec$. Eine Funktion f heisst BCK-Funktion, wenn fuer alle $g \prec f$ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmass μ existiert, derart, dass $g(z) = \int_\partial f(xz) d\mu(x)$. Brannan, Clunie and Kirwan erweiterten den wohlbekannten Satz von Riesz-Herglotz, indem sie zeigten, dass die Funktionen $((1 + xz)/(1 - z))^\alpha$ fuer $x \in^-$und fuer $\alpha \geq 1$ BCK-Funktionen sind. Es gilt nun

Satz 2. Ist $F \subset N_0$ kompakt und sind mit jeder Funktion f auch ihre Drehungen in F und besteht ferner Max F aus BCK-Funktionen, dann sind die Extrempunkte der abgeschlossenen konvexen Huelle von F maximale Elemente, und ein Stuetzpunkt ist eine endliche konvexe Linearkombination von maximalen Elementen.

Dieser Satz kann nun fuer viele Familien konvexer, sternfoermiger und nahezu konvexer Funktionen angewendet werden. Der weitestgehende Fall ist fuer $\beta \in [0, 1]$ die Menge $L_0(\beta)$ der erreichbaren Funktionen f der Ordnung β, d.h. $\setminus f()$ ist die Vereinigung von abgeschlossenen Sektoren des Winkels $(1 - \beta)\pi$.

Man kann Satz 2 anwenden und erhaelt: Satz 5. Sei $\beta \in [0, 1]$. Dann gelten (a) Ein maximales Element von $L_0(\beta)$ hat die Form

$$f(z) = (1 + xyz)/(1 - yz))^{1+\beta}, \quad x, y \in \partial, \quad x \neq -1.$$

(b) Jeder Extrempunkt der abgeschlossenen konvexen Huelle von $L_0(\beta)$ ist ein maximales Element. (c) Jeder Stuetzpunkt von $L_0(\beta)$ is ein maximales Element. Ein entsprechendes Resultat erwartet man auch im Falle der ueblichen Normierung $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$, welches allerdings fuer alle $\beta > 0$ ein offenes Problem darstellt, fuer $\beta < 1$ sind sogar die entsprechenden Probleme fuer nahezu-konvexe Funktionen der Ordnung β offen.

Aus Satz 5 koennen nun scharfe Koeffizientenschranken abgeleitet werden. Entsprechende Ergebnisse bei der ueblichen Normierung sind bislang nicht bekannt. Es werden ferner weitere Extremalprobleme mittels Satz 5 geloest.

Aehnliche Resultate werden fuer sternfoermige Funktionen, fuer schlichte bzgl. der reellen Achse symmetrische Funktionen sowie fuer Funktionen, die konvex in Richtung der imaginaeren Achse sind, erzielt.

Keywords : Riesz-Herglotz representation; functions with positive real part; convex functions; starlike functions; functions with bounded; boundary rotation; close-to-convex functions; accessible; functions; symmetric functions; extreme points; support points; Krein-Milman theorem; Choquet representation; subordination

Classification:

- 30C45 Special classes of univalent and multivalent functions
- 30C75 Extremal problems for (quasi-)conformal mappings, other methods
- 30C80 Maximum principle, etc. (one complex variable)