Adi Ben-Israel, Wolfram Koepf

Schmiegegleichheit in der Analysis

Zwei Funktionen f und g heißen **schmiegegleich** bei x_0, wenn $f(x_0) = g(x_0)$ und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0 \ ,$$

eine Tatsache, die bekanntlich mit $|f - g| = o(|x - x_0|)$ bezeichnet wird. Unmittelbare Folgerungen dieser Definition beinhalten:
- f besitzt unendlich viele Schmiegefunktionen bei beliebigen Punkten; zum Beispiel $g := f + \alpha\,(x - x_0)^\beta$, $\beta > 1$, für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Schmiegegleichheit ist transitiv: $|f - g| = o(|x - x_0|)$, $|g - h| = o(|x - x_0|) \quad \Longrightarrow \quad |f - h| = o(|x - x_0|)$.
- Sind zwei lineare Funktionen schmiegegleich, so sind sie gleich.

Eine Funktion f kann daher höchstens eine lineare Schmiegefunktion $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ an der Stelle x_0 haben, deren Steigung

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die **Ableitung** von f an der Stelle x_0 ist. Die grundlegenden Ableitungsregeln sind einfache Folgerungen der folgenden Ergebisse über die Schmiegegleichheit. Sind T_f und T_g nämlich Schmiegefunktionen von f beziehungsweise von g, dann gilt:
(a) die Summe $\alpha T_f + \beta T_g$ ist schmiegegleich zu $\alpha f + \beta g$, für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
(b) das Produkt $T_f\, T_g$ ist schmiegegleich zum Produkt $f\, g$,
(c) der Quotient T_f / T_g ist schmiegegleich zum Quotienten f/g, vorausgesetzt $g \neq 0$,
(d) die Komposition $T_f \circ T_g$ ist schmiegegleich zu $f \circ g$, sofern T_f linear schmiegegleich zu f und g differenzierbar ist.
Höhere Ableitungen verhalten sich in ähnlicher Weise zur **Schmiegegleichheit n-ter Ordnung**, welche durch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

definiert ist. Eine Funktion f kann an der Stelle x_0 höchstens ein Polynom vom Grad n als Schmiegefunktion n-ter Ordnung haben. Es ist das Taylorpolynom n-ter Ordnung von f an der Stelle x_0, falls f n-mal differenzierbar an der Stelle x_0 ist. Somit liefert die Schmiegegleichheit einen bequemen Zugang zu einer Variante des Satzes von Taylor.

1 Einleitung

Seien die Funktionen f und g definiert in einer Umgebung von x_0 und sei

$$f(x_0) = g(x_0) \ .$$

Dann heißen f und g **schmiegegleich** an der Stelle x_0, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0 \ . \tag{1}$$

Abbildung 1: Illustration der Schmiegegleichheit

Schmiegegleichheit ist illustriert in Abbildung 1(a),(b). Wir werden sehen, daß eine Funktion f an einer gegebenen Stelle x_0 höchstens eine Schmiegefunktion haben kann, welche linear ist,

$$\ell(x) = f(x_0) + m(x - x_0),$$

siehe Abbildung 1(c), in welchem Falle die Steigung m notwendigerweise

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die **Ableitung** $f'(x_0)$ ist. Das Studium der Schmiegefunktionen erlaubt einfache Aussagen und Beweise der grundlegenden Eigenschaften von Ableitungen und Differentiationsregeln.

Wir möchten die Rolle, die die Schmiegegleichheit bei der historischen Entwicklung der Analysis gespielt hat, hervorheben, siehe z.B. [1, S. 163-176], [3], [4] und [6, Kap. 5]. Im Zeitraum 1630–1670 fanden Fermat, Descartes[1], Torricelli, Roberval, Barrow und andere Wissenschaftler wichtige Ergebnisse der Differentialrechnung unter Benutzung von Schmiegefunktionen und bereiteten damit den Weg für die Analysis von Newton und Leibniz.

Im Gegensatz dazu wird die Schmiegegleichheit in der elementaren Analysis gewöhnlich nicht behandelt. Die Ableitung $f'(x_0)$ wird normalerweise eingeführt als der Grenzwert der Steigung von Sekanten durch Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x, f(x))$ für $Q \to P$.

In dieser Arbeit werden Ableitungen mit Hilfe der Schmiegegleichheit eingeführt und studiert. Einige Vorteile dieses Zugangs:

- Schmiegegleichheit kann man sich leicht vergegenwärtigen, indem man die Graphikfähigkeiten von mathematischen Lehr- und Lernprogrammen benutzt (z.B. DERIVE [12], s. z.B. [7]),
- die üblichen Regeln der Differentiation sind einfach zu formulieren und zu beweisen, sofern Schmiegegleichheit behandelt wurde (siehe Sätze 1 und 2 und deren Folgerungen 4 und 5),
- Schmiegegleichheit assoziiert die Ableitung von f an der Stelle x_0 viel mehr mit einer **linearen**

[1] Siehe Abschnitt 5 weiter unten.

Abbildung als mit einer Zahl (siehe z.B. [5, S. 141], [8, S. 123, unten]),

- Schüler oder Studenten, die sich im weiteren mit Ableitungen von Funktionen in $\mathbb{R}^n$ (z.B. [13, S. 16]) und mit Banachräumen (siehe z.B. [5, Kap. VIII], [11, Kap. VI, Abschnitt 41]) beschäftigen werden, benutzen die Schmiegegleichheit in der Form

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \, .$$

2 Schmiegegleichheit

Seien f und g schmiegegleich an der Stelle x_0. Aussage (1) bedeutet, daß die Annäherungsgeschwindigkeit der Graphen von f und g an der Stelle x_0 größer ist als die Annäherungsgeschwindigkeit, mit der sich x gegen x_0 bewegt. Äquivalent dazu ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|} = 0 \, , \tag{2}$$

was wir wie üblich durch

$$|f - g| \;=\; o(|x - x_0|) \tag{3}$$

ausdrücken. Sind f und g schmiegegleich an der Stelle x_0, dann gilt offensichtlich

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = 0 \, . \tag{4}$$

Bedingung (4) ist schwächer als (1); sie besagt nur, daß die Graphen von f und g an der Stelle x_0 einen gemeinsamen Punkt haben, siehe Abbildung 1(b, links).

Bemerkung 1 Jede Funktion f besitzt für jedes x_0 unendlich viele Schmiegefunktionen. In der Tat ist für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta > 1$ die Funktion

$$g(x) := f(x) + \alpha \, (x - x_0)^{\beta} \, . \tag{5}$$

schmiegegleich zu f an der Stelle x_0.

Beweis: $$|f(x) - g(x)| = |\alpha \, (x - x_0)^{\beta}| = o\,(|x - x_0|) \ , \quad \text{da} \ \ \beta > 1 \, .$$ □

Beispiel 1 Die Funktion $f(x) = x^2$ ist in allen Punkten x_0 schmiegegleich zur Funktion

$$y = x_0^2 + 2x_0 \, (x - x_0) \, . \tag{6}$$

Dies folgt aus Bemerkung 1 durch Einsetzen von $\alpha = -1$ und $\beta = 2$ in (5), wodurch man

$$\begin{aligned} g(x) = x^2 - (x - x_0)^2 \;&=\; 2x_0 \, x - x_0^2 \\ &=\; x_0^2 + 2x_0 \, (x - x_0) \end{aligned}$$

als Gleichung einer Funktion erhält, die an der Stelle x_0 schmiegegleich zu x^2 ist, siehe auch Beispiel 3.

Beispiel 2 Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} ,$$

ist ein Beispiel einer am Ursprung stetigen Funktion, die dort aber nicht differenzierbar ist, s. Abbildung 2.

Abbildung 2: Eine Funktion, die am Ursprung nicht differenzierbar ist

Wohl aber gibt es gemäß Bemerkung 1 zu f schmiegegleiche Funktionen: Jede Funktion, wie kompliziert sie auch immer sein mag, hat schmiegegleiche Funktionen, die dann eben ähnlich kompliziert sind.

Wir studieren nun einfache Folgerungen aus der Definition der Schmiegegleichheit.

Hilfssatz 1 (Eigenschaften schmiegegleicher Funktionen) Seien f und g an der Stelle x_0 schmiegegleich.

(a) Ist g an der Stelle x_0 schmiegegleich zu einer dritten Funktion, dann sind auch f und h schmiegegleich[2] bei x_0.

(b) Ist g stetig an der Stelle x_0, dann ist f stetig an der Stelle x_0.

(c) Sind f und g lineare Funktionen, dann gilt $f = g$.

Beweis: (a)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - h(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - h(x)}{x - x_0} = 0.$$

(b) Sei g stetig an der Stelle x_0, d.h.

$$g(x_0) = y_0 = \lim_{x \to x_0} g(x) . \tag{7}$$

[2] D.h. Schmiegegleichheit ist **transitiv**.

Dann gilt für alle x

$$|f(x) - y_0| \;\leq\; |f(x) - g(x)| \;+\; |g(x) - y_0| \;,$$

und wegen (4) und (7),

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \;.$$

(c) Seien f und g lineare Funktionen, die durch den Punkt (x_0, y_0) gehen, d.h.

$$f(x) = y_0 + m\,(x - x_0) \;,\; g(x) = y_0 + n\,(x - x_0) \;.$$

Die Schmiegegleichheit von f und g impliziert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = m - n = 0 \;,$$

und beweist, daß $f = g$. ☐

Wir haben gesehen, daß eine Funktion an jedem Punkt x_0 unendlich viele Schmiegefunktionen besitzt. Kann sie mehr als eine lineare Schmiegefunktion an der Stelle x_0 haben?

Folgerung 1 Eine Funktion f kann an einer Stelle x_0 höchstens eine lineare Schmiegefunktion haben.

Beweis: Habe f an der Stelle x_0 zwei lineare Schmiegefunktionen ℓ_1 und ℓ_2. Dann sind ℓ_1 und ℓ_2 schmiegegleich an der Stelle x_0 nach Hilfssatz 1(a) und somit $\ell_1 = \ell_2$ nach Hilfssatz 1(c). ☐

Beispiel 3 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die lineare Schmiegefunktion von $f(x) = x^n$ an der Stelle x_0 ist gegeben durch

$$y = x_0^n + \left(n\,x_0^{n-1}\right)(x - x_0) \;. \tag{8}$$

Beweis:

$$x^n = (x_0 + (x - x_0))^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}\,(x - x_0)^k \;,$$

$$\text{daher}\quad x^n - \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}\,(x - x_0)^k \;=\; x_0^n + \left(n\,x_0^{n-1}\right)(x - x_0) \;, \tag{9}$$

jedoch sind nach Bemerkung 1 die Funktionen x^n und $x^n - \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}\,(x - x_0)^k$ schmiegegleich an der Stelle x_0. Daher stellt die rechte Seite von (9) die lineare Schmiegefunktion von x^n an der Stelle x_0 dar.[3] ☐

Beispiel 4 Die Funktion $f(x) = |x|$ besitzt keine lineare Schmiegefunktion an der Stelle $x = 0$.

Beweis: Eine lineare Schmiegefunktion von $|x|$ an der Stelle $x = 0$ müßte durch den Ursprung gehen, d.h. $\ell(x) = mx$. Aber der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - m\,x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} - m$$

[3] Man braucht für diesen Beweis im übrigen die benutzte Binomialentwicklung nicht vollständig zu kennen. Es reicht, wenn man die ersten beiden Summanden genau kennt.

existiert für kein $m \in \mathbb{R}$. $\square$

Abbildung 3: Die Betragsfunktion und zwei ihrer Schmiegefunktionen

Andererseits haben z.B. die Funktionen $|x| + x^2$ bzw. $|x| + x^3$ dasselbe Verhalten am Ursprung und sind daher Schmiegefunktionen zu f, s. Abbildung 3.

Satz 1 (Schmiegefunktionen von Summen und Produkten) Seien T_f und T_g schmiegegleich zu f bzw. g,[4] und seien ferner f, g, T_f und T_g in einer Umgebung von x_0 beschränkt.
(a) Für beliebige reelle α und β ist die Funktion $\alpha\, T_f + \beta\, T_g$ schmiegegleich zu $\alpha\, f + \beta\, g$.
(b) Das Produkt $T_f\, T_g$ ist schmiegegleich zum Produkt $f\, g$.
(c) Ist $|g(x)| \geq \alpha$ für ein $\alpha > 0$ in einer Umgebung von x_0, so ist die Kehrwertfunktion $\dfrac{1}{T_g(x)}$ schmiegegleich zu der Kehrwertfunktion $\dfrac{1}{g(x)}$.
(d) Ist $|g(x)| \geq \alpha$ für ein $\alpha > 0$ in einer Umgebung von x_0, so ist der Quotient

$$\frac{T_f(x)}{T_g(x)} \quad \text{schmiegegleich zu dem Quotienten} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \; .$$

Beweis: Sei $|f - T_f|\ ,\ |g - T_g| = o\,(|x - x_0|)$.

(a)

$$|\alpha\, f + \beta\, g - (\alpha\, T_f + \beta\, T_g)| \;\leq\; |\alpha|\ |f - T_f| + |\beta|\ |g - T_g| \;=\; o\,(|x - x_0|) \ .$$

(b)

$$\begin{aligned} |f\, g - T_f\, T_g| = |f\, g - T_f\, g + T_f\, g - T_f\, T_g| \;&\leq\; |f\, g - T_f\, g| + |T_f\, g - T_f\, T_g| \\ &=\; |g|\ |f - T_f| + |T_f|\ |g - T_g| = o\,(|x - x_0|) \ , \end{aligned}$$

da g und T_f beschränkt sind.
(c)

[4] “Schmiegegleich” bedeute genauer “schmiegegleich an der Stelle x_0”.

$$\left|\frac{1}{g} - \frac{1}{T_g}\right| = \left|\frac{T_g - g}{g\,T_g}\right| = o\left(|x - x_0|\right) \ .$$

(d) folgt aus (b) und (c). □

Bemerkung 2 Die Maximumfunktion $\max\{f, g\}$ ist typischerweise nicht differenzierbar an Stellen, an denen sich die Graphen von f und g schneiden, selbst dann, wenn f und g differenzierbar sind. Wir sehen an (e), daß Schmiegegleichheit sich "besser verhält" als Differenzierbarkeit.

3 Differenzierbarkeit

Definition 1 (Ableitung an einem Punkt) Besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 eine lineare Schmiegefunktion

$$\ell(x) = f(x_0) + m(x - x_0) \ , \tag{10}$$

so nennen wir f **differenzierbar** an der Stelle x_0, und die Steigung m heißt die **Ableitung** von f an der Stelle x_0 und wird durch $f'(x_0)$ bezeichnet.

Um dies mit der gebräuchlichen Definition der Ableitung in Verbindung zu setzen, zeigen wir:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ . \tag{11}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x_0} \ , \text{ nach (1) ,} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \to x_0} \frac{m\,(x - x_0)}{x - x_0} \ , \text{ nach (10) ,} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \ , \quad \text{und somit} \quad (11) \ . \end{aligned}$$

□

In Hilfssatz 1(b) wurde bewiesen, daß Stetigkeit sich auf schmiegegleichen Funktionen vererbt. Da eine lineare Funktion stetig ist, erhalten wir

Folgerung 2 Ist f differenzierbar an der Stelle x_0, dann ist f stetig an der Stelle x_0. □

Schmiegegleichheit fängt das Wesentliche der Differenzierbarkeit ein in dem folgenden Sinne: Alle an einer Stelle x_0 schmiegegleichen Funktionen sind bei x_0 entweder differenzierbar und besitzen dieselbe Ableitung oder sind allesamt nicht differenzierbar.

Folgerung 3 Seien die Funktionen f und g definiert in einer Umgebung von x_0, $f(x_0) = g(x_0)$, und sei g differenzierbar an der Stelle x_0. Dann sind f und g schmiegegleich an der Stelle x_0 genau dann, wenn f differenzierbar ist an der Stelle x_0, und

$$f'(x_0) = g'(x_0) \tag{12}$$

Beweis: Die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\ , \quad \text{da } f(x_0)=g(x_0),\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}+g'(x_0)\ , \quad \text{da } g \text{ differenzierbar ist an der Stelle } x_0,
\end{aligned}$$

zeigt, daß die Schmiegegleichheit von f und g äquivalent ist zu (12). □

Definition 2 (Die Ableitungsfunktion) Ist f differenzierbar in jedem Punkt eines offenen Intervalls I, dann heißt f **differenzierbar** in I. Die **Ableitungsfunktion** von f, die wir mit f' bezeichnen, ordnet jedem $\xi \in I$ den Wert der Ableitung $f'(\xi)$ an der Stelle ξ zu.

Ist f differenzierbar in einem offenen Intervall I, dann ist f nach Folgerung 2 stetig in I.

Schmiegegleichheit hilft bei der Behandlung der elementaren Ableitungsregeln (für Summen, Produkte und Quotienten).

Folgerung 4 (Ableitungsregeln) Seien f und g differenzierbar in einem offenen Intervall I mit den Ableitungen f' beziehungsweise g', dann gelten
(a) Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\alpha\, f+\beta\, g$ differenzierbar[5], und die Ableitung ist $\alpha\, f'+\beta\, g'$.
(b) Das Produkt $f\,g$ ist differenzierbar, und die Ableitung ist $f\,g' + f'\,g$.
(c) Existiert ein $\alpha > 0$ derart, daß $|g(x)| \geq \alpha$ für alle $x \in I$, dann ist die Kehrwertfunktion

$$\frac{1}{g} \quad \text{differenzierbar, und die Ableitung ist} \quad -\frac{g'}{g^2}\ .$$

(d) Existiert ein $\alpha > 0$, so daß $|g(x)| \geq \alpha$ für alle $x \in I$, dann ist der Quotient

$$\frac{f}{g} \quad \text{differenzierbar, und die Ableitung ist} \quad \frac{f'g-fg'}{g^2}\ .$$

Beweis: Diese Regeln sind Folgerungen der entsprechenden Aussagen in Satz 1.
(b) Sei ξ ein beliebiger Punkt in I, und sei

$$\begin{aligned}
T_f(x) &= f(\xi)+f'(\xi)\,(x-\xi) \quad \text{die lineare Schmiegefunktion von } f \text{ an der Stelle } \xi \text{ sowie}\\
T_g(x) &= g(\xi)+g'(\xi)\,(x-\xi) \quad \text{die lineare Schmiegefunktion von } g \text{ an der Stelle } \xi\ .
\end{aligned} \tag{13}$$

Dann ist

$$T_f(x)\,T_g(x) = f(\xi)\,g(\xi)+\Big(f(\xi)\,g'(\xi)+f'(\xi)\,g(\xi)\Big)\,(x-\xi)+f'(\xi)\,g'(\xi)\,(x-\xi)^2$$

eine Schmiegefunktion von $f\,g$ an der Stelle ξ, was wegen Bemerkung 1 zeigt, daß

$$y = f(\xi)\,g(\xi)+\Big(f(\xi)\,g'(\xi)+f'(\xi)\,g(\xi)\Big)\,(x-\xi)$$

[5] "Differenzierbar" bedeute genauer "differenzierbar in I".

die lineare Schmiegefunktion ist mit Steigung $f(\xi)\, g'(\xi) + f'(\xi)\, g(\xi)$.
(c) An der Stelle ξ ist der Kehrwert von T_g (13) eine Schmiegefunktion von $1/g$. Wir bestätigen algebraisch, daß

$$\frac{1}{g(\xi) + g'(\xi)\,(x-\xi)} - \left(\frac{1}{g(\xi)} - \frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}\,(x-\xi)\right) = \frac{g'(\xi)^2\,(x-\xi)^2}{(g(\xi) + g'(\xi)\,(x-\xi))\,g(\xi)^2} = o(|x-\xi|)\ .$$

Die lineare Schmiegefunktion von $1/T_g$ bei ξ ist demnach

$$y = \frac{1}{g(\xi)} - \frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}\,(x-\xi) \quad \text{mit Steigung} \quad -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}\ .$$

(d) folgt aus (b) und (c). □

Das folgende Resultat kann dazu verwendet werden, um die Kettenregel zu beweisen.

Satz 2 (Komposition) Die Funktion g erfülle in einer Umgebung von x_0 die Bedingung

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \leq M \qquad \text{für ein } M > 0, \tag{14}$$

f sei differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$,

$$L_f(u) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\,(u - g(x_0)) \tag{15}$$

sei die lineare Schmiegefunktion von f an der Stelle $g(x_0)$ und sei $T_g(x)$ irgendeine Schmiegefunktion von g an der Stelle x_0. Dann ist die Komposition der Schmiegefunktionen

$$(L_f \circ T_g)(x) := L_f(T_g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\,(T_g(x) - g(x_0)) \tag{16}$$

eine Schmiegefunktion der Komposition

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

bei x_0.

Beweis: Wir schreiben

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - L_f(T_g(x))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - L_f(g(x))}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{L_f(g(x)) - L_f(T_g(x))}{x-x_0}\ , \tag{17}$$

und beweisen, daß beide Terme der rechten Seite von (17) verschwinden. Erstens gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(g(x)) - L_f(g(x))}{x-x_0}\right| &= \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(g(x)) - L_f(g(x))}{g(x)-g(x_0)}\right| \left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right|\ ,\\
&\leq \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(g(x)) - L_f(g(x))}{g(x)-g(x_0)}\right| M\ , \quad \text{nach (14)}\ ,\\
&= 0\ , \quad \text{da } L_f \text{ schmiegegleich zu } f \text{ an der Stelle } g(x_0) \text{ ist}\ .
\end{aligned} \tag{18}$$

Zweitens gilt nach (15), daß

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{L_f(g(x)) - L_f(T_g(x))}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(g(x_0))\,(g(x) - T_g(x))}{x-x_0}\ ,\\
&= f'(g(x_0)) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - T_g(x)}{x-x_0}\ ,\\
&= 0\ , \quad \text{da } T_g \text{ eine Schmiegefunktion ist zu } g \text{ an der Stelle } x_0\ .
\end{aligned} \tag{19}$$

Schließlich gilt nach (18) und (19), daß der Grenzwert in (17) gleich Null ist. □

Beispiel 5 Bedingung (14) ist wesentlich für Satz 2. Betrachte die Funktionen

$g(x) = x^{1/3}$ und eine beliebige zugehörige Schmiegefunktion $T_g(x)$ an der Stelle 0 ,

$f(u) = u^2$, deren lineare Schmiegefunktion an der Stelle $g(0) = 0$ gegeben ist durch $L_f \equiv 0$.

Die Komposition der Schmiegefunktionen $L_f(T_g(x)) \equiv 0$ ist nicht schmiegegleich an der Stelle 0 zur Komposition $f(g(x)) = x^{2/3}$.

Folgerung 5 (Die Kettenregel) Seien g an der Stelle x_0 und f an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Komposition

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \tag{20}$$

differenzierbar an der Stelle x_0; die Ableitung ist dort

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0) \ . \tag{21}$$

Beweis: Benutze Satz 2 mit $L_f(u)$ wie in (15) und die lineare Schmiegefunktion

$$L_g(x) = g(x_0) + g'(x_0)\,(x - x_0) \tag{22}$$

von g an der Stelle x_0. Die Komposition der Schmiegefunktionen (15) und (22) ist

$$L_f(L_g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\, g'(x_0)\,(x - x_0) \tag{23}$$

die lineare Schmiegefunktion von $f \circ g$ an der Stelle x_0 mit Steigung $f'(g(x_0))\, g'(x_0)$. □

4 Höhere Ableitungen und Schmiegegleichheit n-ter Ordnung

Höhere Ableitungen können rekursiv gemäß Definition 2 definiert werden.

Definition 3 (n-fache Differenzierbarkeit) Ist die Funktion f an der Stelle x_0 $(n-1)$-mal differenzierbar und besitzt die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ eine lineare Schmiegefunktion an der Stelle x_0,

$$\ell_{n-1}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + m(x - x_0) \ , \tag{24}$$

dann heißt f **n-mal differenzierbar** an der Stelle x_0, und die Steigung m wird die **n-te Ableitung** von f an der Stelle x_0 genannt und mit $f^{(n)}(x_0)$ bezeichnet.

Wir wollen in der Folge die n-fache Differenzierbarkeit mit der Schmiegegleichheit in Verbindung setzen. Dazu betrachten wir zunächst den folgenden

Hilfssatz 2 Seien f und g Schmiegefunktionen an der Stelle x_0, die integrierbar in einer Umgebung von x_0 seien. Dann erfüllen die Stammfunktionen

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad G(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

die Beziehung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - G(x)}{(x - x_0)^2} = 0 \ . \tag{25}$$

Beweis: Die Schmiegegleichheit von f und g ist äquivalent zu der Aussage: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g(x)| < \epsilon\, |x - x_0|\ .$$

Für solche δ ist das Integral

$$F(x) - G(x) = \int_{x_0}^{x} (f(t) - g(t))\, dt$$

durch

$$|F(x) - G(x)| < \epsilon\, |x - x_0|^2$$

beschränkt, so daß

$$\frac{|F(x) - G(x)|}{|x - x_0|^2} < \epsilon\ , \quad \text{äquivalent zu (25).} \qquad \square$$

Hilfssatz 2 zeigt, daß die Integrale schmiegegleicher Funktionen "schmiegegleich höherer Ordnung" sind, und zwar im Sinne der folgenden

Definition 4 (Schmiegegleichheit n-ter Ordnung) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen f und g heißen **schmiegegleich n-ter Ordnung** bei x_0, wenn $f(x_0) = g(x_0)$ und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0\ . \tag{26}$$

Spezielle Fälle: Für $n = 0$ reduziert sich (26) auf die Bedingung $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$, während für $n = 1$ sich die normale Schmiegegleichheit (1) ergibt.

Beispiel 6 Die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) \equiv 0\ , \tag{27}$$

sind für alle $n \in \mathbb{N}$ schmiegegleich n-ter Ordnung am Ursprung, da bekanntlich $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Genauso wie Hilfssatz 2 beweist man

Hilfssatz 3 Seien f und g Schmiegefunktionen n-ter Ordnung an der Stelle x_0, die integrierbar in einer Umgebung von x_0 seien. Dann sind die Stammfunktionen

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \text{und} \quad G(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

Schmiegefunktionen $n{+}1$-ter Ordnung an der Stelle x_0.

Die folgenden Eigenschaften der Schmiegegleichheit n-ter Ordnung sind unmittelbar. Man beachte, daß (b) eine Transitivität analog zu Hilfssatz 1(a) und daß (c) eine Verallgemeinerung von Folgerung 1 ist. Wir überlassen die analogen Beweise dem Leser.

Hilfssatz 4 Seien $m, n \in \mathbb{N}$.
(a) Sind f und g schmiegegleich n-ter Ordnung,[6] so sind sie auch schmiegegleich k-ter Ordnung für alle $0 \leq k \leq n$.

(b) Sind die Funktionen f, g Schmiegefunktionen n-ter Ordnung und die Funktionen g, h Schmiegefunktionen m-ter Ordnung, dann sind f und h Schmiegefunktionen der Ordnung $k = \min\{m, n\}$.

(c) Eine Funktion f kann höchstens ein Polynom n-ter Ordnung als Schmiegefunktion n-ter Ordnung besitzen. $\square$

Sei f nun n-mal differenzierbar an der Stelle x_0, und sei die lineare Schmiegefunktion von $f^{(n-1)}(x)$ an der Stelle x_0 mit

$$p^{(n-1)}(x) := f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0) \tag{28}$$

bezeichnet, siehe Definition 4. Dann sind die Stammfunktionen

$$\begin{aligned}
f^{(n-2)}(x) &= f^{(n-2)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{(n-1)}(t)\,dt \\
\text{und}\quad p^{(n-2)}(x) &:= f^{(n-2)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} p^{(n-1)}(t)\,dt \\
&= f^{(n-2)}(x_0) + f^{(n-1)}(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2
\end{aligned}$$

gemäß Hilfssatz 2 Schmiegefunktionen 2. Ordnung an der Stelle x_0. Durch weitere Integration erhalten wir mit Hilfssatz 3 Schmiegefunktionen 3. Ordnung

$$\begin{aligned}
f^{(n-3)}(x) &= f^{(n-3)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{(n-2)}(t)\,dt \\
\text{und}\quad p^{(n-3)}(x) &:= f^{(n-3)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} p^{(n-2)}(t)\,dt \\
&= f^{(n-3)}(x_0) + f^{(n-2)}(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{2 \cdot 3}\,(x - x_0)^3.
\end{aligned}$$

Fahren wir in dieser Weise fort, erhalten wir durch Induktion die

Folgerung 6 Eine an der Stelle x_0 n-mal differenzierbare Funktion f ist eine Schmiegefunktion n-ter Ordnung an der Stelle x_0 zu dem Polynom

$$p(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k\ . \tag{29}$$

[6] Bedeute wieder "schmiegegleich" genauer "schmiegegleich an der Stelle x_0".

Beweis: Das Polynom (29) erhält man durch $n-1$-malige Integration von (28). $\square$

Das Polynom (29) ist **das Taylorpolynom n-ten Grades** von f an der Stelle x_0. Nach Hilfssatz 4(c) ist es dasjenige eindeutig bestimmte Polynom vom Grad n, welches eine Schmiegefunktion n-ter Ordnung von f an der Stelle x_0 ist.

Ist $f(x_0) = g(x_0)$ und sind die Ableitungen f' und g' schmiegegleich an der Stelle x_0, dann sind nach Hilfssatz 2 die Funktionen f und g Schmiegefunktionen 2. Ordnung an der Stelle x_0. Die Umkehrung davon ist i.a. falsch.

Beispiel 7 Die Funktionen

$$f(x) = x^2 + \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^2$$

sind Schmiegefunktionen 2. Ordnung. Jedoch sind die Ableitungen f' und g' nicht schmiegegleich an der Stelle 0.

Die Umkehrung von Folgerung 6 ist somit ebenfalls falsch: Beispiel 7 zeigt, daß eine Funktion f an der Stelle x_0 schmiegegleich n-ter Ordnung zu einem Polynom vom Grad n sein kann, ohne daß die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ existiert. Das Konzept der Schmiegegleichheit n-ter Ordnung ist für $n \geq 2$ somit zu schwach, um n-fache Differenzierbarkeit zu garantieren. Das Äußerste, was an dieser Stelle gesagt werden kann, ist:

Folgerung 7 Seien f und g Schmiegefunktionen n-ter Ordnung an der Stelle x_0, die ℓ- bzw. m-mal differenzierbar seien. Dann gilt

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, \ldots, \min\{\ell, m\}) \ .$$

Beweis: Die Funktionen f und g haben an der Stelle x_0 dasselbe Taylorpolynom vom Grad $\min\{\ell, m\}$. $\square$

Behandelt man also die Integration **vor** der Differentiation,[7] so ergibt sich auf diese Weise also ein bequemer Zugang zu einer Variante des Satzes von Taylor.

5 Die Kreismethode von Descartes

Wir schließen mit einer Anekdote aus der Geschichte der Analysis: Die Kreismethode von Descartes zur Konstruktion der Tangente zu $y = f(x)$ am Punkt $P(x_0, f(x_0))$. Descartes arbeitete nämlich mit der Schmiegegleichheit 2. Ordnung.

Betrachte eine Kreislinie mit Radius r und Mittelpunkt (a, b)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \ .$$

Die lineare Schmiegefunktion des Kreises an einer beliebigen Stelle $P(x_0, y_0)$ $(y_0 \neq b)$ hat die Steigung

$$m = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b} \ ,$$

[7] Über die Vorzüge dieses Zugangs haben wir an anderer Stelle (s. [9] und [10]) berichtet.

da sie senkrecht zum Radius ist, welcher (x_0, y_0) mit (a, b) verbindet und dessen Steigung gleich

$$\frac{y_0 - b}{x_0 - a}$$

ist. Die Kreismethode von Descartes berechnet nun die lineare Schmiegefunktion einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ am Punkt $P(x_0, f(x_0))$ in zwei Schritten:

Schritt 1. Berechne einen Kreis, der schmiegegleich ist zu f an der Stelle P.

Schritt 2. Berechne die Schmiegefunktion des Kreises wie oben.

Zur Vereinfachung hatte Descartes den Kreis auf die x-Achse zentriert, siehe Abbildung 4. Dessen Gleichung ist

$$y^2 + (x - a)^2 = r^2 \ , \tag{30}$$

wobei die Koordinate a und der Radius r unbekannt sind.

Abbildung 4: Die Kreismethode von Descartes.

Ein Kreis möge den Graphen von f in zwei Punkten schneiden. Fallen diese beiden Punkte an der Stelle $P(x_0, f(x_0))$ zusammen, dann ist der Kreis schmiegegleich zu f an der Stelle x_0. Es ist hierbei günstig, mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes die Schmiegegleichheit 2. Ordnung zu benutzen.

Hilfssatz 5 Sind f^2 und g^2 schmiegegleich 2. Ordnung an der Stelle x_0 und gilt

$$\lim_{x \to x_0} \ (f(x) + g(x)) \neq 0 \ , \tag{31}$$

dann sind f und g schmiegegleich erster Ordnung an der Stelle x_0.

Beweis: Das Resultat folgt, da

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \ = \ \frac{f^2(x) - g^2(x)}{(x - x_0)^2} \, \frac{x - x_0}{f(x) + g(x)} \ . \qquad \square$$

Beispiel 8 Bedingung (31) wird gebraucht. Betrachte $f(x) = |x|$ und $g(x) = x$. Dann ist $f^2 = g^2$, aber f und g sind nicht schmiegegleich am Ursprung.

Um den Kreis (30) schmiegegleich zu f zu machen, reicht es also aus, die Funktionen f^2 und y^2 (in (30)) zu Schmiegefunktionen 2. Ordnung zu machen. Descartes erzwang dies durch die Bedingung

$$(x-a)^2 + f^2(x) - r^2 = (x-x_0)^2 \ \phi(x) \tag{32}$$

mit einer geeigneten Funktion ϕ. Falls nun f^2 ein Polynom ist und man ϕ ebenfalls als Polynom wählt, kann man durch Koeffizientenvergleich die Unbekannten r und a finden. Die Steigung der Normalen PC ist dann

$$-\frac{f(x_0)}{a-x_0} \ , \quad \text{siehe Abbildung 4} \ ,$$

und die Steigung der Schmiegefunktion somit

$$m = \frac{a-x_0}{f(x_0)} \ . \tag{33}$$

Beispiel 9 Die Schmiegefunktion der Parabel

$$y^2 = 2\,p\,x \tag{34}$$

bei einem beliebigen Punkt $(x_0, \sqrt{2\,p\,x_0})$ $(x_0 \neq 0)$ hat die Steigung

$$m = \sqrt{\frac{p}{2\,x_0}} \ .$$

Beweis: Ersetzt man $f^2(x) = 2\,p\,x$ in (32), und benutzt man $\phi(x) = 1$, so erhält man

$$(x-a)^2 + 2\,p\,x - r^2 = (x-x_0)^2 \ ,$$

und mittels Koeffizientenvergleich folgt, daß $a = p + x_0$ ist, so daß nach (33) gilt

$$m = \frac{a-x_0}{f(x_0)} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x_0}} \ . \qquad \square$$

Der algebraische Zugang von Descartes ist nur anwendbar für einfache Kurven einschließlich der Kegelschnitte. Erweitert zu allgemeinen algebraischen Kurven durch Hudde und Sluse[8] in der Zeit 1650-1660, wurde die Methode durch das Aufkommen der Analysis überholt.

Danksagung. Diese Arbeit ist ein Nebenprodukt von [2]. Wir danken unserem Mitautor, Professor Robert Gilbert (University von Delaware), für viele hilfreiche Vorschläge.

Anschrift der Verfasser: Dr. Wolfram Koepf, Seelingstr. 21, 14059 Berlin,
Dr. Adi Ben-Israel, School of Business and Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08903-5062, U.S.A.

Literatur

[1] M.E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, 1969; Neuauflage Dover 1987

[8] [6, S. 127–132].

[2] A. Ben-Israel, R.P. Gilbert und W. Koepf, *Calculus with* DERIVE, Brooks/Cole Publ. Co., 1994, wird erscheinen.

[3] C.B. Boyer, *The History of Calculus and its Conceptual Development*, Hafner 1949; Neuauflage Dover 1959

[4] J.L. Coolidge, "The story of tangents", *Amer. Math. Monthly* **58**(1951), 449-462

[5] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1960

[6] C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, 1979

[7] A. Engel, Eine Vorstellung von Derive. In: Didaktik der Mathematik 18 (1990), 165–182.

[8] A.G. Howson, *A Handbook of Terms used in Algebra and Analysis*, Cambridge, 1972

[9] W. Koepf und A. Ben-Israel, The definite nature of indefinite integrals, 1992, wird erscheinen.

[10] W. Koepf und A. Ben-Israel, Integration mit DERIVE, Didaktik der Mathematik 21, 1993, 40–50.

[11] L.A. Liusternik und V.J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis*, F. Ungar, 1961

[12] A. Rich, J. Rich und D. Stoutemyer, DERIVE *User Manual*, Soft Warehouse, Inc., 3660 Waialae Avenue, Suite 304, Honolulu, Hawaii, 96816-3236.

[13] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965