

Geschichte der Analysis

Wolfram Koepf, Universität Kassel

Wintersemester 2007/2008

1 Vorchristliche Mathematik

1.1 Die Ägypter und die Babylonier (1650 v. Chr.)

Die Mathematik der Ägypter und Babylonier bestand in Rezeptesammlungen (z. B. Papyrus Rhind, Abbildung 3), generell wurden keine Formeln, sondern Beispielrechnungen durchgeführt, die die Algorithmen veranschaulichten, und es sind keine Herleitungen der betrachteten Algorithmen überliefert. Es wurden hauptsächlich geometrische Probleme untersucht.

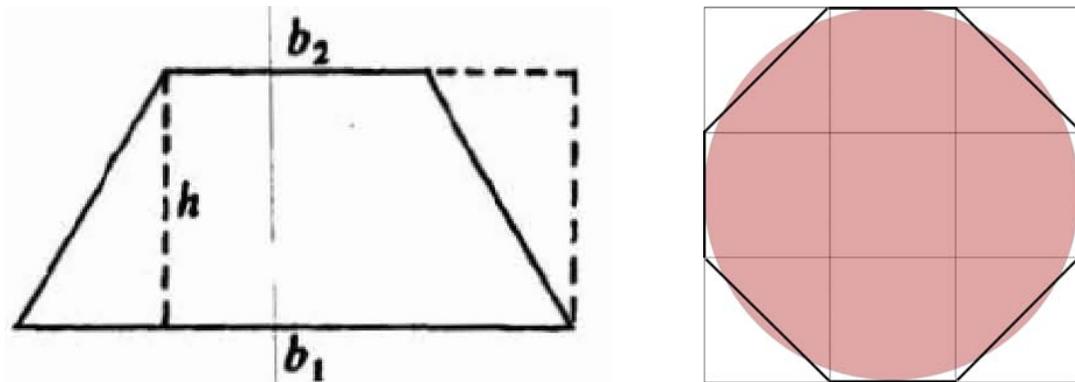


Abbildung 1: Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes und Approximation von π .

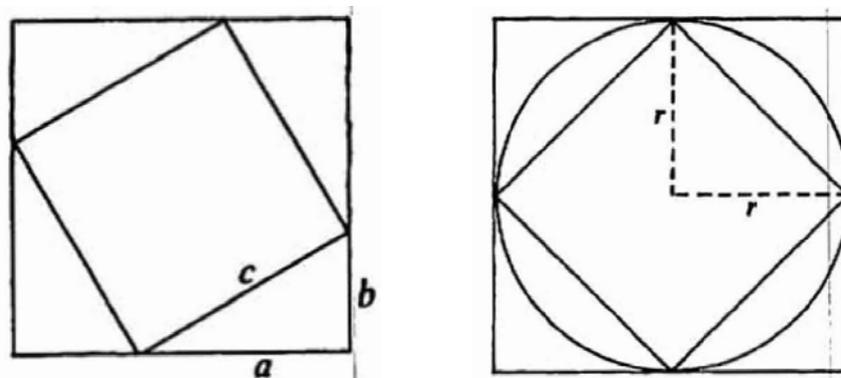


Abbildung 2: Zur Herleitung des Satzes von Pythagoras und $\pi \approx 3$ als Mittelwert.

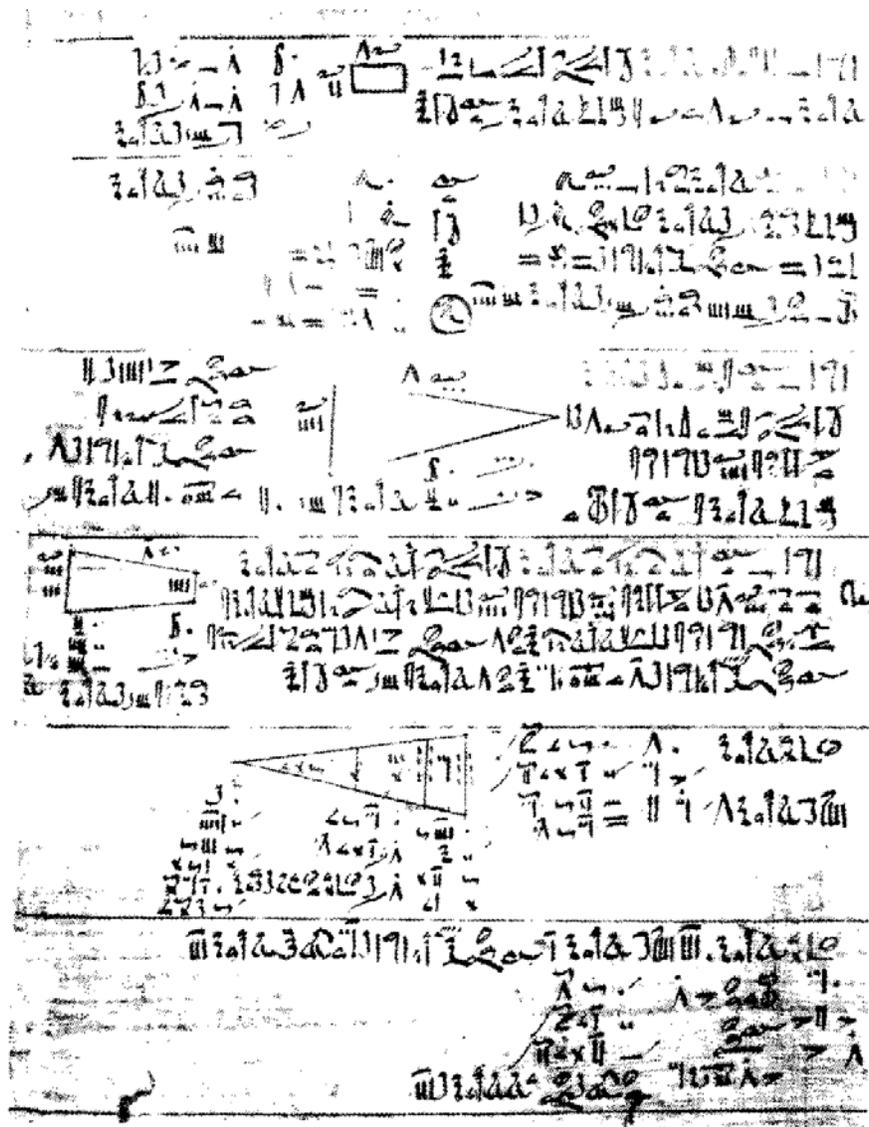


Abbildung 3: Eine Seite des Papyrus Rhind. Quelle: Wikipedia

Ein mathematischer Formelapparat, wie wir ihn heute kennen, war nicht bekannt. Dennoch werde ich das damalige Wissen durch moderne Formeln ausdrücken. Durch unsere heutige Sozialisation können wir so diese Erkenntnisse besonders gut nachvollziehen.

Ein Beispiel aus Ägypten ist die Berechnung des Flächeninhalts $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ eines gleichschenkligen Trapezes, s. Abbildung 1, links. Aus dem Papyrus Rhind stammt die exzellente Approximation von $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$, s. Abbildung 1, rechts.

Die Babylonier benutzten den Satz des Pythagoras (570-510 v. Chr.). Sie kannten die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und könnten den Satz des Pythagoras z. B. gemäß Abbildung 2, links, hergeleitet haben. Dennoch haben die Babylonier mit der schlechten Approximation $\pi \approx 3$ gerechnet, die sich möglicherweise als Mittelwert gemäß Abbildung 2, rechts, ergab.

Auf der anderen Seite führten die Babylonier sehr genaue numerische Berechnungen im sexadesimalen System durch, z. B.

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41423$$

mit Fehler $\approx 10^{-6}$!

1.2 Frühe griechische Mathematik

Die Griechen der pythagoreischen Schule (ca. 500 v. Chr.) arbeiteten nur mit ganzen Zahlen. Rationale Zahlen ließen sie nur als Proportionalitäten zu. So etwas wie irrationale Zahlen (inkommensurable Größen) erkannten sie nicht an. Auf der Basis von Proportionalitäten erkannten sie beispielsweise, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit m -fachen Seitenlängen m^2 so groß ist u. ä..

Anders als Ägypter und Babylonier stellten sich die Griechen Fragen theoretischer Natur. Die drei berühmten klassischen Probleme der Antike sind Beispiele hierfür: Quadratur des Kreises, Würfelverdopplung und Winkeldreiteilung.

Demokrit (460-371 v. Chr.) erkannte als erster, dass das Volumen einer Pyramide den dritten Teil des zugehörigen Prismas ergibt, s. Abbildung 4 (Vorführung: *MuPAD*).

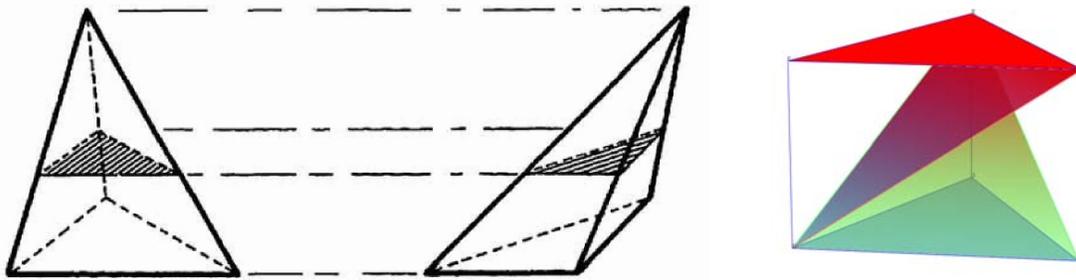


Abbildung 4: Zur Bestimmung des Volumens einer Pyramide.

Die Griechen fanden heraus, dass es nicht kommensurable Größen gibt, z. B. $\sqrt{2}$ als Diagonale eines Quadrats (Satz des Pythagoras). Dies ließ sich mit dem prinzipiell *diskreten* Charakter des Zahlverständnisses der Griechen nicht vereinbaren, zeigte es doch, dass in der Geometrie inherent *kontinuierliche* Größen eine Rolle spielen.

Dies führte im vierten Jahrhundert vor Chr. zu einer „Grundlagenkrise“ und zu der Vervollkommnung rigoroser deduktiver Argumentationen und kulminierte schließlich in Euklids *Elementen* (Euklid: 365-300 v. Chr.) als Grundlage der Geometrie. Dies werden wir nicht weiter verfolgen, wollen wir uns doch auf die Entwicklung der Analysis konzentrieren.

1.3 Eudoxos (390-338 v. Chr.)

Um von Kurven berandete Flächeninhalte zu bestimmen, wird zunächst angenommen, dass sich Flächen monoton und additiv verhalten. Ferner wird das Prinzip der Exhaustion angewendet: Man approximiert die Fläche von innen immer exakter durch Polygone, ohne allerdings unendliche Folgen zu benutzen. Natürlich muss dennoch irgendwie gezeigt werden, dass die Differenz zwischen Approximation und wahrer Fläche beliebig klein gemacht werden kann.

Hierfür benutzt Eudoxos das *Archimedische Axiom* (aus Euklids Elementen) und wendet es iterativ an. Das Archimedische Axiom besagt: Zu je zwei (positiven ganzen) Zahlen $a < b$ gibt es eine ganze Zahl n mit $na > b$. Die iterative Form, welche Eudoxos verwendete, kann so formuliert werden:

Prinzip des Eudoxos

Zwei Zahlen $0 < a < b$ seien gegeben. Wenn man von der größeren Zahl b eine Größe abzieht, die mindestens halb so groß ist, und vom Resultat wieder eine Größe abzieht, die mindestens halb so groß ist, und immer weiter so fortfährt, dann bleibt eine Größe übrig, die kleiner ist als a .



Abbildung 5: Demokrit, Euklid und Eudoxos

Hieraus folgt (Übungsaufgabe): Für jedes $q \in (0, 1/2)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \varepsilon$. In heutigen Worten: Aus dem Archimedischen Axiom folgt, dass die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Dies gilt natürlich für alle $q \in (0, 1)$, folgt aus dem Prinzip des Eudoxos aber nur für $q < 1/2$.

Wir wollen nun zeigen, dass die in einen Kreis *einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecke* den Kreis ausschöpfen, s. Abbildung 6, links.

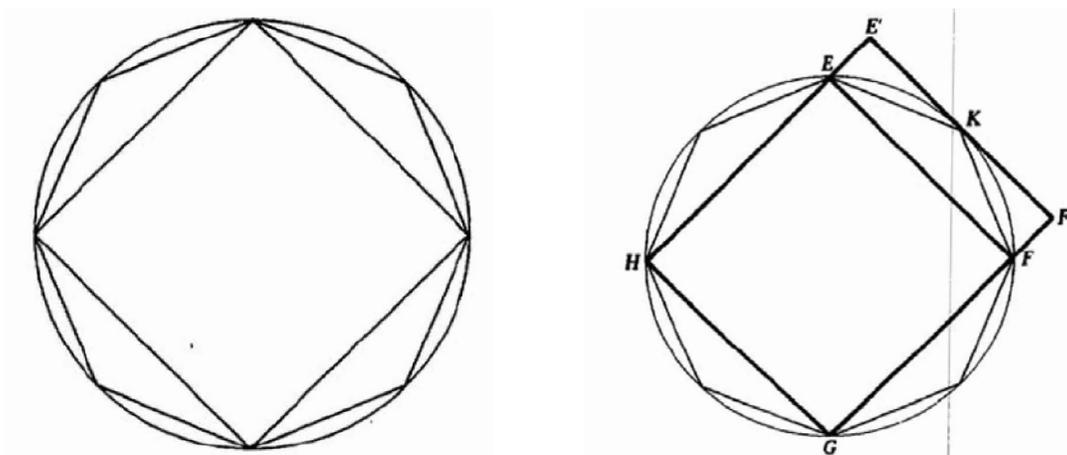


Abbildung 6: Die Ausschöpfung eines Kreises durch regelmäßige n -Ecke.

Hilfssatz 1 Gegeben sei ein Kreis K und eine Zahl $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein einbeschriebenes regelmäßiges n -Eck P mit

$$\text{area}(K) - \text{area}(P) < \varepsilon .$$

Beweis: Wir starten mit dem einbeschriebenen Quadrat $P_0 = EFGH$. Wir erklären $M_0 := \text{area}(K) - \text{area}(P_0)$. Verdoppelt man nun die Anzahl der Seiten des Polygons, so erhält man ein einbeschriebenes regelmäßiges 8-Eck P_1 . Dies kann man iterativ fortfahren und erhält somit eine Folge von Polygonen P_0, P_1, P_2, \dots , wobei das Polygon P_n genau $4 \cdot 2^n$ Seiten hat. Wir schreiben

$$M_n := \text{area}(K) - \text{area}(P_n) ,$$

und wir wollen zeigen, dass

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2} M_n \quad (1)$$

ist. Dann folgt aus dem Prinzip des Eudoxos, dass $M_n < \varepsilon$ für n groß genug, und wir sind fertig.

Der Beweis von (1) sieht für alle $n \in \mathbb{N}$ prinzipiell gleich aus, und wir zunächst den „Induktionsanfang“ aus. Wir erhalten gemäß Abbildung 6, rechts

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= \text{area}(P_1) - \text{area}(P_0) = 4 \text{area}(\Delta(EFK)) \\ &= 2 \text{area}(EFF'E') > 2 \text{area}(\text{arc}(EKF)) \\ &= \frac{1}{2} (\text{area}(K) - \text{area}(P_0)) , \end{aligned}$$

also $M_0 - M_1 > \frac{1}{2} M_0$. Im allgemeinen Fall erhalten wir analog

$$M_n - M_{n+1} = \text{area}(P_{n+1}) - \text{area}(P_n) > \frac{1}{2} (\text{area}(K) - \text{area}(P_n)) = \frac{1}{2} M_n .$$

Damit ist (1) bewiesen. □

Nun kommen wir zu einer weiteren charakteristischen Technik, welche von den Griechen gerne eingesetzt wurde: Der doppelten „*reductio ad absurdum*“. Wir beweisen mit dieser Methode rigoros den

Satz 2 *Zwei Kreise K_1 und K_2 mit Radien r_1 und r_2 seien gegeben. Dann gilt für die Flächeninhalte $A_1 := \text{area}(K_1)$ und $A_2 := \text{area}(K_2)$ die Beziehung*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} .$$

Beweis: Genau eine der drei Möglichkeiten ist richtig:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2} .$$

Wenn wir nun zeigen, dass sowohl die zweite als auch die dritte Möglichkeit (also die beiden Ungleichungen) zu einem Widerspruch führen, muss also die erste Beziehung, somit die Gleichung, gelten.

Wäre nun beispielsweise $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$, also

$$A_2 > \frac{r_2^2}{r_1^2} A_1 =: S .$$

Wir setzen $\varepsilon := A_2 - S > 0$. Dann gibt es aufgrund des Hilfssatzes ein einbeschriebenes Polygon P_2 mit

$$A_2 - \text{area}(P_2) < \varepsilon = A_2 - S ,$$

also $\text{area}(P_2) > S$. Für ähnliche Polygone P_1 und P_2 gilt die Beziehung

$$\frac{\text{area}(P_1)}{\text{area}(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{A_1}{S} ,$$

wobei P_1 dem Kreis K_1 einbeschrieben sei (Ähnlichkeit, Übungsaufgabe). Also folgt

$$\frac{S}{\text{area}(P_2)} = \frac{A_1}{\text{area}(P_1)} = \frac{\text{area}(K_1)}{\text{area}(P_1)} > 1 ,$$

also $S > \text{area}(P_2)$, ein Widerspruch. Genauso wird im zweiten Fall ein Widerspruch erzeugt. □

1.4 Archimedes (282-212 v. Chr.)

Mit Hilfe der doppelten *reductio ad absurdum* konnten die Griechen also zeigen, dass

1. der Flächeninhalt eines Kreises proportional zum Quadrat des Radius ist:

$$A = \pi_1 r^2 .$$

2. der Umfang eines Kreises proportional zum Durchmesser ist

$$U = \pi_2 d = 2\pi_2 r .$$

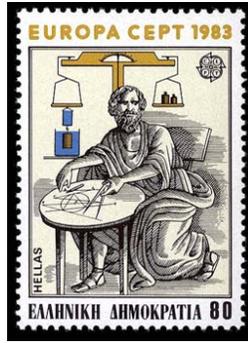
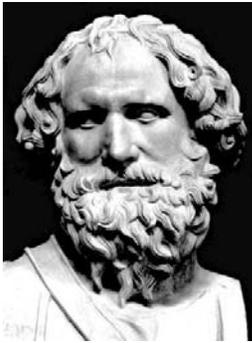


Abbildung 7: Archimedes

Wir wissen heute, dass die beiden Proportionalitätskonstanten übereinstimmen, $\pi_1 = \pi_2$, und gleich $\pi \approx 3,14159265358979323846264338328 \dots$ sind. Dies ist aber zunächst gar nicht klar, denn die eine Größe hat etwas mit einer Länge, die andere mit einem Flächeninhalt zu tun.

Archimedes zeigt die folgende Beziehung (2). Er geht folgendermaßen vor: Er zeigt rigoros, dass der Flächeninhalt eines Kreises gleich dem Flächeninhalt eines Dreiecks ist, dessen eine Seite dem Umfang des Kreises entspricht und dessen Höhe gleich seinem Radius ist, also

$$A = \frac{1}{2} r U , \tag{2}$$

woraus dann durch Substitution folgt

$$\pi_1 r^2 = \frac{1}{2} r 2\pi_2 r ,$$

also $\pi_1 = \pi_2$.

Der Beweis von (2) ist wieder ein typischer Beweis mit doppelter *reductio ad absurdum*. Er approximiert wie bereits früher den Flächeninhalt *von innen* durch einbeschriebene reguläre Polygone. Er approximiert aber weiterhin den Flächeninhalt auch *von außen* durch umbeschriebene reguläre Polygone. Aus dem Archimedischen Prinzip folgt bekanntlich, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein einbeschriebenes Polygon P gibt mit $\text{area}(P) > A - \varepsilon$. Genauso gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein umbeschriebenes Polygon Q gibt mit $\text{area}(Q) < A + \varepsilon$.

Ist nun statt (2) $A > \frac{1}{2} r U$, dann setzt man $\varepsilon := A - \frac{1}{2} r U$ und wählt ein einbeschriebenes Polygon P mit $\text{area}(P) > A - \varepsilon$. Wenn s_n die Seitenlänge von P ist und r_n die Länge der Höhe vom Zentrum auf eine Seite von P , dann ist $r_n < r$ und $n s_n < U$ (Übungsaufgabe). Da P die Vereinigung von n gleichschenkligen Dreiecken mit Basis s_n und Höhe r_n ist, folgt also

$$\text{area}(P) = n \frac{1}{2} r_n s_n = \frac{1}{2} r_n (n s_n) < \frac{1}{2} r U .$$

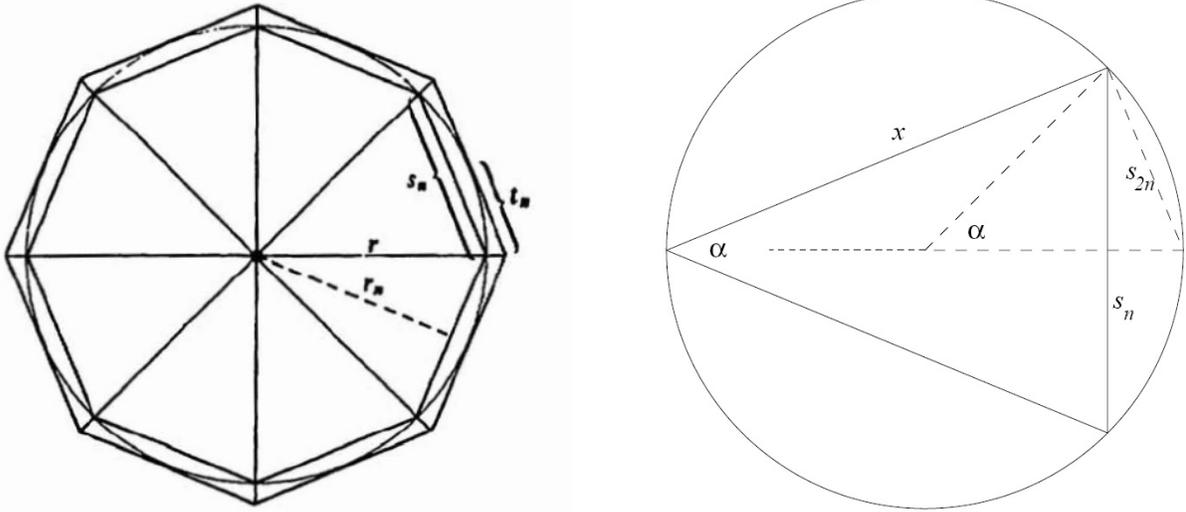


Abbildung 8: Archimedes

Dies ist aber der gesuchte Widerspruch.

Nimmt man nun an, dass $A < \frac{1}{2}rU$ ist, setzt man $\varepsilon := \frac{1}{2}rU - A$ und wählt ein umschriebenes Polygon Q mit $\text{area}(Q) < A + \varepsilon = \frac{1}{2}rU$. Wir schreiben t_n für die halbe Seitenlänge von Q und erhalten

$$\text{area}(Q) = n \frac{1}{2}r(2t_n) = \frac{1}{2}r(2nt_n) > \frac{1}{2}rU,$$

da der Umfang von Q größer als U ist (Übungsaufgabe) und damit wieder den erwünschten Widerspruch.

In der heutigen Zeit würden wir diesen Beweis vielleicht so führen: Wir berechnen

$$A_n = nr^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad U_n = 2nr \sin \frac{\pi}{n}$$

für den Flächeninhalt und den Umfang des einbeschriebenen Polygons. Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir hieraus $A = \frac{1}{2}rU$.

Wir betrachten nun, wie Archimedes die Kreiszahl π durch Approximation des Umfangs eines Kreises durch ein- und umschriebene regelmäßige Vielecke angenähert und damit π approximiert hat.

Wir betrachten das dem Einheitskreis einbeschriebene regelmäßige n -Eck, s. Abbildung 8, dessen Seitenlänge wir mit s_n bezeichnen.

Wir wenden den Satz vom Umfangswinkel an und zeigen, daß die Formel

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad (3)$$

gilt.

In Abbildung 8, rechts, finden wir auf Grund des Satzes vom Umfangswinkel zwei ähnliche Dreiecke. Daher haben wir

$$\frac{s_{2n}}{1} = \frac{s_n}{x}, \quad (4)$$

Für x gilt wegen der Sätze von Thales und Pythagoras weiter

$$s_{2n}^2 + x^2 = 4. \quad (5)$$

Eliminiert man nun x aus diesen beiden Gleichungen, folgt (3).

Da das n -Eck n Seiten der Länge s_n besitzt, gilt für seinen Umfang

$$U_n = n s_n \rightarrow 2\pi .$$

Beginnen können wir mit dem Quadrat, bei dem $s_4 = \sqrt{2}$ und $U_4 = 4\sqrt{2}$ ist (oder auch mit dem Sechseck mit $s_6 = 1$ und $U_6 = 6$). Ist n eine Zweierpotenz $n = 2^k$ ($k \geq 2$), so können wir also zur Berechnung von $\pi_n = U_n/2$ als Approximation von π die rekursive Formel

$$\pi_n := \frac{n}{2} s_n , \quad s_n = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{falls } n = 4 \\ \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{n/2}^2}} & \text{sonst} \end{cases}$$

heranziehen. Ähnlich folgt für t_n die Beziehung

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}} .$$

Archimedes hat hieraus die Ungleichungskette

$$3,140845\dots = 3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7} = 3,142857\dots$$

hergeleitet, indem er den Kreis von innen und von außen durch ein 96-Eck approximiert.

Als nächstes wollen wir zeigen, wie Archimedes auf die Formel des Flächeninhalts $A = \pi a b$ einer Ellipse E

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit den Hauptachsen a und b kam. Die Ellipse kann mit der sogenannten Gärtnerkonstruktion konstruiert werden (Vorführung *Mathematica*). In der folgenden Zeichnung wurde der Hilfskreis K mit Radius a eingezeichnet.

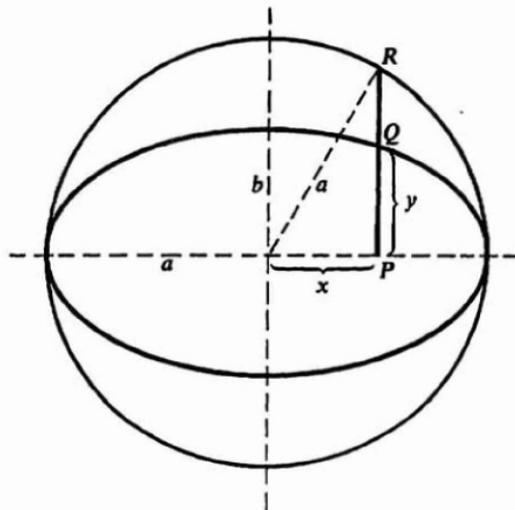


Abbildung 9: Charakterisierung der Ellipse

Archimedes benutzt die folgende Charakterisierung der Ellipse:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{b}{a} ,$$

welche mittels Pythagoras aus der definierenden Gleichung folgt:

$$PQ = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} PR .$$

Archimedes stellt hiermit die offensichtliche Tatsache fest, dass die Ellipse E also durch Stauchung des Kreises K um den Faktor b/a entsteht mit dem Effekt, dass sich auch der Flächeninhalt um diesen Faktor reduziert:

$$A = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi a b .$$

Dies beweist er dann auf die übliche Weise durch doppelte *reductio ad absurdum*. Dies führe ich nicht vor.

Während die Proportionen des Kreises wohl bereits vor Archimedes bekannt waren, war Archimedes der erste, der die Proportionen der Kugel herleitete und den bekannten Zusammenhang der auftretenden Proportionalitätskonstanten mit π herstellte.

Archimedes bestimmte Volumina und Oberflächen vieler geometrischer Körper. Er fand diese Zusammenhänge so faszinierend, dass etwas Ähnliches wie Abbildung 10 seinen Grabstein zieren sollte.¹

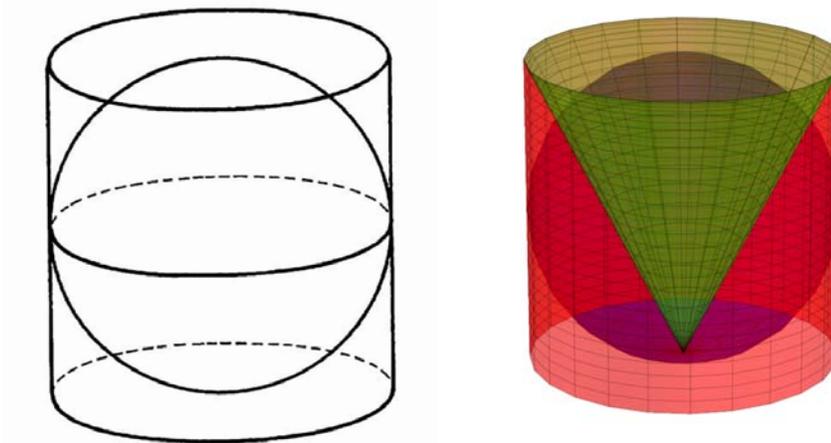


Abbildung 10: Archimedes Grabstein: Kugel, Kegel und Zylinder

Auf dem üblichen Weg konnten die Griechen zeigen, dass die Volumina V_1 und V_2 zweier Kugeln mit Radien r_1 und r_2 sich zueinander verhalten wie

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} .$$

Hieraus folgt also $V = \alpha r^3$, aber was verbirgt sich hinter der Proportionalitätskonstanten α ? Archimedes konnte zeigen, dass

$$\alpha = \frac{4}{3} \pi \tag{6}$$

ist. Ebenso zeigte er den Zusammenhang

$$V = \frac{1}{3} r O , \tag{7}$$

¹Leider scheint der Grabstein nicht mehr vorhanden zu sein, so dass nicht ganz klar ist, wie die Inschrift im Detail lautete.

zwischen der Oberfläche O und dem Volumen V der Kugel. Dies liefert dann mit (6)

$$O = 4 \pi r^2 .$$

Bevor wir zur Herleitung von (6) kommen, wollen uns zunächst überlegen, wie man sich die Gleichung (7) plausibel machen kann. Danach werden wir uns dem Volumen der Kugel widmen.

Archimedes stellt sich die Kugel aus lauter „kleinen“ Pyramiden zusammengesetzt vor, deren Spitzen sich im Ursprung befinden. Die Kugel entsteht dann durch einen gedanklichen Grenzübergang, den Archimedes aber nicht explizit durchführt. Das Volumen der Kugel ist also die Summe der Volumina der Pyramiden. Da sich die Pyramidenvolumina gemäß Demokrit aus der Formel

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$$

berechnen, da die gemeinsame Höhe gleich dem Radius der Kugel ist und da die Summe der Pyramidengrundflächen die Oberfläche der Kugel liefert, zeigt diese Überlegung in der Tat (7). Wie immer beweist Archimedes diese vermutete Gleichung dann durch doppelte *reductio ad absurdum*.

Wir kommen nun zur Herleitung der Formel (6), also der Formel

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

für das Kugelvolumen. Die Griechen dachten ja gerne in Verhältnissen, und das Ziel wird sein, folgende Verhältnisse in Abbildung 10, rechts, aufzuzeigen:

$$V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 2 : 1 . \quad (8)$$

Um dies zu erreichen, werden wir nun *andere Zylinder und Kegel* betrachten, s. Abbildung 11, die in anderen Verhältnissen zueinander stehen, welche wir in der Folge herausfinden wollen.



Abbildung 11: Nochmals Kugel, Kegel und Zylinder

In Abbildung 12 erhalten wir folgende Gleichungen: Der Satz des Pythagoras liefert

$$x^2 + y^2 = s^2$$

und der Kathetensatz im Thaleskreis ergibt weiter

$$2 r x = s^2 ,$$

so dass also

$$x^2 + y^2 = 2 r x$$

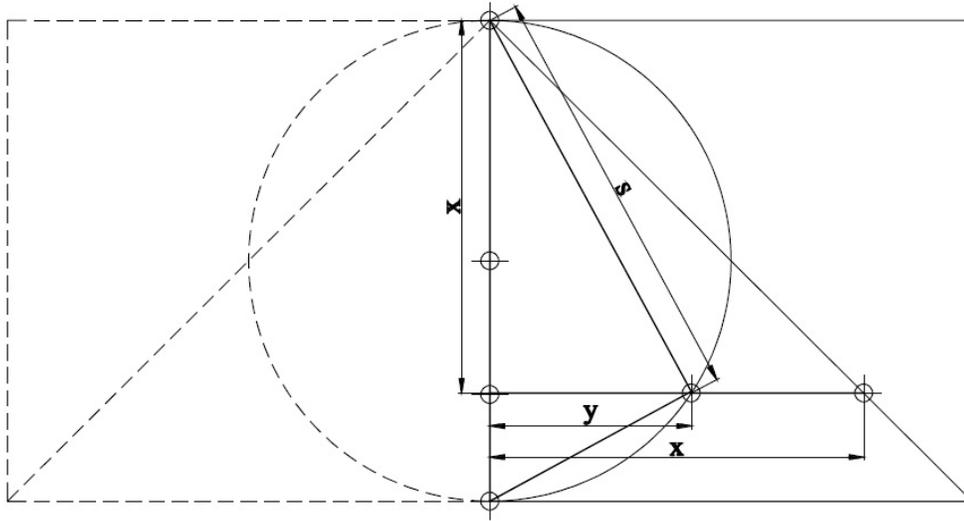


Abbildung 12: Volumenverhältnisse bei Kugel, Kegel und Zylinder

ist. Wir multiplizieren mit $2\pi r$ und erhalten schließlich

$$(\pi x^2 + \pi y^2) 2r = (\pi (2r)^2) x . \quad (9)$$

Wir lassen nun die Zeichnung aus Abbildung 12 um die vertikale Mittelachse rotieren. Dies erzeugt eine Kugel, einen Kegel sowie einen Zylinder. In der Klammer links steht die Summe der Oberflächen der Schnittflächen der Kugel (πy^2) und des Kegels (πx^2). In der Klammer rechts steht die Schnittfläche des Zylinders ($\pi(2r)^2$).

Multipliziert man die obige Gleichung (9) mit einer kleinen Dicke d

$$(\pi x^2 d + \pi y^2 d) 2r = (\pi (2r)^2 d) x ,$$

so lassen sich die auftretenden Größen als die Volumina dünner Scheiben der Dicke d auffassen, und diese Gleichung können wir nun mit Archimedes auf folgende physikalische Weise nach dem Hebelgesetz interpretieren: Auf der linken Seite ist der Hebelarm $2r$, auf der rechten Seite x , und die Gleichung besagt, dass Kugelscheibe und Kegelscheibe zusammen, mit dem Hebelarm $2r$, und Zylinderscheibe, mit dem Hebelarm x , im Gleichgewicht sind.

Summiert man nun diese Beiträge und beachtet, dass der Gesamthebel des gesamten Zylinders sich durch eine Schwerpunktbedingung (Hebelarm also r) ergibt, so erhält man

$$(V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Kugel}}) 2r = V_{\text{Zylinder}} r$$

oder

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{2} V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} .$$

Wendet man außerdem Demokrits Volumenberechnung der Pyramide nun auch auf den Kegel an (dies hat wohl wieder Eudoxos zuerst gemacht), so erhalten wir weiter

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} V_{\text{Zylinder}} .$$

Fasst man nun alles zusammen, so erhalten wir schließlich

$$V_{\text{Kugel}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) V_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{6} V_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{6} \pi (2r)^2 2r = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Dies liefert am Ende auch (7) und (8).

Wir können hier nicht alle schönen Ideen von Archimedes behandeln. Ich denke aber, die Auswahl zeigte, dass Archimedes bereits vor mehr als 2.000 Jahren Fragestellungen der Integralrechnung (sogenannte Quadraturen) lösen konnte und dass er sehr moderne Beweistechniken benutzte. Was den Griechen aber für eine moderne Sichtweise der Differential- und Integralrechnung fehlte, war

- die Furcht vor dem Unendlichen; daher waren Grenzwertkonzepte nicht erreichbar.
- ein genereller Algorithmus für die Berechnung von Flächen- und Volumeninhalten. Jedes Problem musste *ad hoc* behandelt werden.
- die fehlende Erkenntnis der inversen Beziehung zwischen Flächen- und Tangentenbestimmung. Das Tangentenkonzept *berührender Linien* war hierfür ungeeignet.

Erst diese Ingredienzien macht die moderne Infinitesimalrechnung möglich. Aber immerhin war Archimedes seiner Zeit eineinhalb Jahrtausende voraus. . .

2 Mathematik im Mittelalter

Die griechische Mathematik stand ungefähr ein Jahrtausend, nämlich zwischen 600 v. Chr. und 400 n. Chr., in Blüte, mit einem Höhepunkt um 300 v. Chr. Der Kollaps des Römischen Reiches um 500 zerstörte dieses kulturelle Erbe.

Im Jahr 529 schloss der Kaiser Justinian die griechischen Schulen der „heidnischen“ Philosophie in Athen samt der Platonischen Akademie, welche neun Jahrhunderte lang überdauert hatte. Es folgte ein „dunkles“ Zeitalter ohne größere wissenschaftliche Fortschritte.



Abbildung 13: Muhammad Al-Khwarizmi

Wir wechseln daher nun ins neunte Jahrhundert. Der Mathematiker und Astronom Al-Khowarizmi (780–850) arbeitete in Bagdad und schrieb bedeutende Lehrbücher über Arithmetik und Algebra. Das Dezimalsystem war von den Hindus in Indien eingeführt worden und setzte sich durch den Einfluss von Al-Khowarizmi weiter durch. Das Wort „Algebra“ stammt vom Titel *Al-jabr wa'l muqabalah* des zweiten Buchs von al-Khowarizmi. Der Terminus *Al-jabr* bezog sich hierbei auf das Bringen eines Terms auf die andere Seite einer Gleichung mittels Addition.

Al-Khowarizmi studiert die Lösung quadratischer Gleichungen. Beispielsweise gibt er die Lösung der Gleichung $x^2 + 10x = 39$ auf folgende Art an: „Man nehme die Hälfte der Wurzel (= Koeffizient von x), also fünf, und multipliziere dies mit sich selbst, also erhält man fünfundzwanzig.

Addiere dies zu neununddreißig – dies gibt vierundsechzig. Nimm nun die Quadratwurzel, also acht, und subtrahiere die Hälfte der Wurzel, also fünf. Das Resultat, also drei, ist die gesuchte Lösung.“ In moderner Notation liefert er also die Lösungsformel $-b + \sqrt{b^2 + c}$ der Gleichung $x^2 + 2bx = c$. Die geometrische Anschauung, die sich hinter dem verwendeten Algorithmus verbirgt, wird auf Abbildung 14 sichtbar.

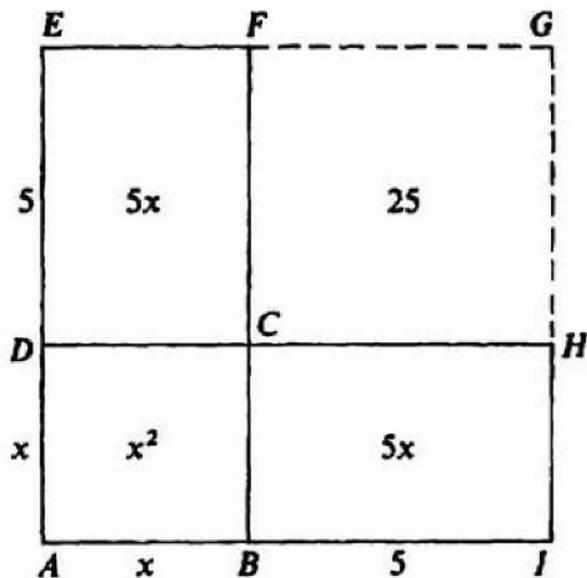


Abbildung 14: Zur Veranschaulichung der Lösung der Gleichung $x^2 + 10x = 39$.

Die arabische Mathematik fand ihren Höhepunkt im elften Jahrhundert mit Ali Alhazen (965–1039).

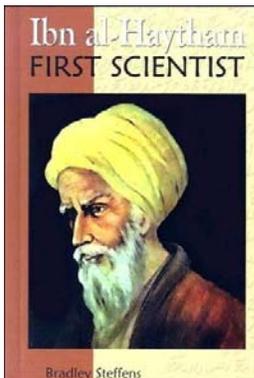


Abbildung 15: Ali Alhazen

Er bestimmte auf geometrischem Wege die Rekursionsformel

$$(n + 1) \sum_{i=1}^n i^k = \sum_{i=1}^n i^{k+1} + \sum_{p=1}^n \left(\sum_{i=1}^p i^k \right) \quad (10)$$

für die Potenzsummen, s. Abbildung 16. Aus dieser generellen Formel lassen sich die Potenzsummenformeln iterativ entwickeln. Offenbar ist dies eine Weiterentwicklung von Archimedes, der mit Hilfe der Potenzsummen-Formeln für $k = 1$ und $k = 2$ lediglich die Parabel integrieren konnte.

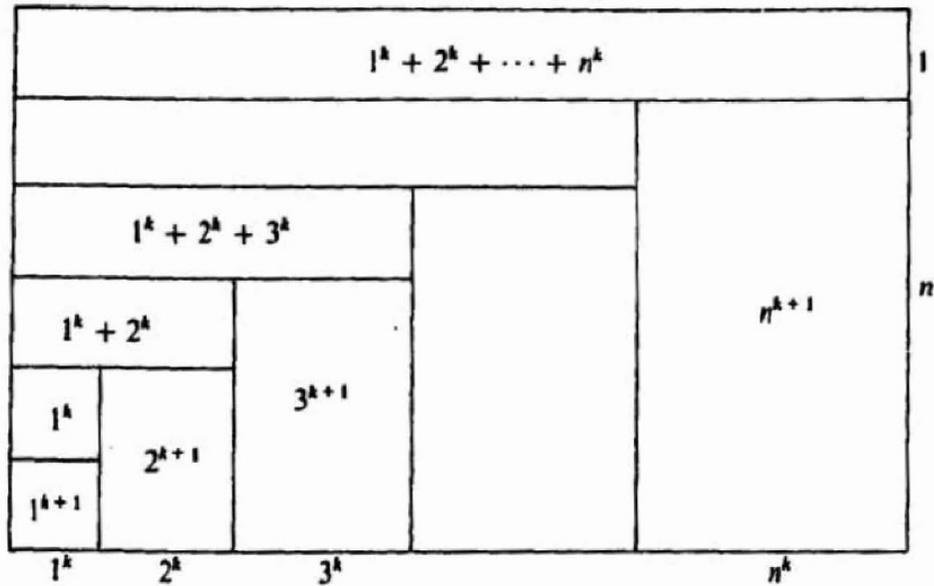


Abbildung 16: Die Potenzsummen.

Setzt man die bekannte Formel

$$\sum_{i=1}^n 1 = n$$

in Formel (10) für $k = 0$ ein, so erhält man

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Setzt man dies wiederum in (10) für $k = 1$ ein, so bekommt man weiter

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Auf diese Weise erhält man iterativ alle Potenzsummenformeln (Vorführung: *Mathematica*). Dies war ein wichtiger Schritt für die Polynom-Integration.

Auch in Europa wollte man nun die griechischen Quellen lesen. Die Elemente von Euklid wurden 1142 von Adelard of Bath vom Arabischen ins Lateinische übersetzt und Robert of Chester produzierte 1145 eine lateinische Übersetzung des Algebra-Buches von Al-Khowarizmi.

Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

war bereits den Griechen bekannt und wurde von Archimedes für bestimmte Quadraturen benutzt. Im 14. Jahrhundert wurden die ersten unendlichen Reihen summiert, die sich nicht direkt durch die geometrische Reihe ausdrücken lassen. Richard Swineshead (um 1340) gab die Reihensumme

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$$

an. Swineshead argumentiert physikalisch mit sich ändernden Geschwindigkeiten, und der Beweis ist lang und umständlich. Wie kann man diese Summation wiederum geometrisch einsehen? Nikolaus von Oresme (ca. 1330-1382) benutzt zwei verschiedene Summationsreihenfolgen und kommt dann wieder mit Hilfe der geometrischen Reihe zum Ziel, s. Abbildung 17.

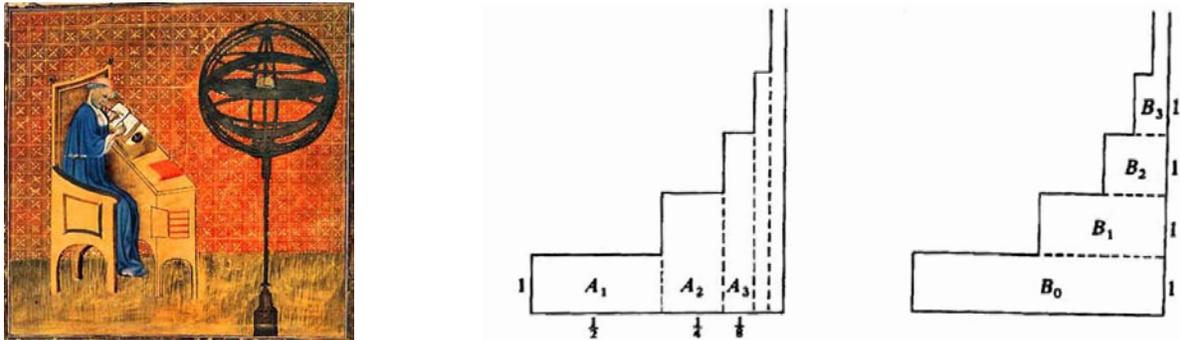


Abbildung 17: Nikolaus von Oresme: Zwei verschiedene Summationsreihenfolgen.

Die Summanden werden durch Flächeninhalte repräsentiert. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{area}(A_k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \text{area}(B_j) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2, \end{aligned}$$

und hat damit die Berechnung – doch wieder – auf die geometrische Reihe zurückgeführt. In moderner Notation geht dies wegen $k = \sum_{j=1}^k 1$ ganz formal auch so:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Natürlich hat man sich zu der damaligen Zeit – schon auf Grund der geometrischen Veranschaulichung – noch keine Gedanken darüber gemacht, ob die Vertauschung der Summationsreihenfolge „erlaubt“ ist. Solche Fragen sind erst viel später möglich, wenn der Begriff des Grenzwerts eine klare Definition erhalten hat.

François Viète (Vieta, 1540–1603), s. Abbildung 18, war einer der ersten, die systematisch mit Variablen und vielen der uns gebräuchlichen Operationszeichen gearbeitet hat. In seinem Buch



Abbildung 18: François Vieta und Geronimo Cardano

Introduction to the Analytic Art von 1592 schreibt er beispielsweise „A cubus + B plano in A aequatur C in A quadratus + D solido“ für die Gleichung $A^3 + B A = C A^2 + D$, ganz ähnlich wie wir heute.

Eine Konsequenz der Unterscheidung zwischen gesuchten Größen („ x “) und Parametern (z. B. „ p “ und „ q “) gebar folgende Erkenntnis, welche auch noch heute Vieta zugeschrieben wird. Der *Satz von Vieta* liefert den Zusammenhang zwischen den Nullstellen eines Polynoms und seinen Koeffizienten. Im Falle eines normierten quadratischen Polynoms ist

$$x^2 + p x + q = (x - x_1)(x - x_2) ,$$

also nach Ausmultiplizieren

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 x_2 .$$

Ähnlich kann man bei Polynomen höheren Grades vorgehen. Dies werden wir bald benutzen.

Ebenfalls in diese Zeit fällt die Lösung von Polynomgleichungen dritten Grades (gelöst von Del Ferro und Tartaglia, veröffentlicht 1545 durch Cardano: *Ars Magna*) sowie vierten Grades durch Ferrari. Sie benötigten für die Darstellung ihrer Ergebnisse wiederum die genaue Unterscheidung zwischen Unbekannten (x) und Parametern (a, b, c, \dots), welche von Vieta bereitgestellt worden war.

Ich möchte kurz die *Cardanoschen Formeln* vorstellen.² Gesucht sind die Lösungen der Gleichung dritten Grades

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0 .$$

Man transferiert diese Gleichung per $x = u - \frac{b}{3a}$ in eine (einfachere) Gleichung der Form $u^3 + p u + q = 0$ (Vorführung *Mathematica*) und macht nun eine Fallunterscheidung, je nach Vorzeichen der Diskriminante

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

mit

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{und} \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

- $D > 0$: Es gibt genau eine reelle Lösung und zwei echt komplexe Lösungen.
- $D = 0$: Es gibt entweder eine doppelte und eine einfache reelle Lösung oder eine dreifache reelle Lösung.

²Cardano, s. Abbildung 18, hat diese Formel von seinem Lehrer Tartaglia erfahren und – gegen seinen ausdrücklichen Willen – publiziert.

- $D < 0$: Es gibt drei verschiedene reelle Lösungen.

Man beachte, dass hier (formal) Lösungen auftreten, bei welchen unter einem Quadratwurzelzeichen negative Zahlen stehen. Man nannte diesen Fall den *casus irreducibilis*, da er vor Einführung der komplexen Zahlen nicht aus den Cardanoschen Formeln hergeleitet werden konnte.

Rechnet man allerdings naiv mit diesen Zahlen, kann es passieren, dass die resultierenden Lösungen – trotz Verwendung des Symbols $\sqrt{-1}$ – am Ende reell sind (Vorführung mit *Mathematica*). In heutiger Notation können die Lösungen wie folgt angegeben werden:

- Zu $D > 0$:

– Die reelle Lösung:

$$x_1 = D_1 + D_2 - \frac{b}{3a} \quad \text{mit } D_{1/2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}}$$

– Die komplexen Lösungen:

$$x_{2/3} = -\frac{D_1 + D_2}{2} - \frac{b}{3a} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (D_1 - D_2)$$

- Zu $D = 0$:

– Eine doppelte reelle Lösung:

$$x_{1/2} = -\frac{3q}{2p} - \frac{b}{3a} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} - \frac{b}{3a}$$

– Eine einfache reelle Lösung:

$$x_3 = \frac{3q}{p} - \frac{b}{3a} = \sqrt[3]{-4q} - \frac{b}{3a}$$

– Ist $p = q = 0$, so gibt es eine dreifache Lösung.

- Zu $D < 0$:

– Drei verschiedene reelle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a} \\ x_2 &= \sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right)\right) - \frac{b}{3a} \\ x_3 &= -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a} \end{aligned}$$

Wir betrachten das Beispiel $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$, bei welchem also $a = 1, b = 0, c = -3$ und $d = -1$ sind. Es ergibt sich $p = -3, q = -1$, also $D = -\frac{3}{4}$. Somit liegt der dritte Fall vor und wir erhalten (DERIVE-Vorführung)

$$x_1 = -2 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right), \quad x_2 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \quad \text{und} \quad x_3 = -2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right).$$

Der Satz von Vieta liefert

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3),$$

also

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3$$

und

$$x_1 x_2 x_3 = 1,$$

was – in unserem Beispiel – gar nicht einmal so einfach reproduzierbar ist (Übungsaufgabe!).

Auch für Gleichungen vierten Grades gibt es eine Lösungsformel (*Mathematica*-Vorführung), die von Ferrari, einem Schüler von Cardano, angegeben wurde, während es für Gleichungen höheren Grades keine Lösungsformeln geben kann, wie erst viel später bewiesen wurde.



Abbildung 19: René Descartes, Pierre de Fermat und Christiaan Huygens

Der finale und auch entscheidende Schritt für die Entwicklung der Analysis war die Einführung der analytischen Koordinatengeometrie durch René Descartes (1596-1650) und Pierre de Fermat (1607-1665), s. Abbildung 19.³ Noch heute sprechen wir in Erinnerung an Descartes von *kartesischen Koordinaten*.

Die zentrale Idee der analytischen Geometrie ist die Beziehung einer Gleichung $f(x, y) = 0$ mit dem geometrischen Ort aller Punkte (x, y) eines ebenen Koordinatensystems, welche diese Gleichung erfüllen. Wir benutzen noch heute die von Descartes eingeführten Variablen x und y zu diesem Zweck. Descartes und Fermat führten diesen Zusammenhang ein, um die algebraischen Erkenntnisse auf geometrische Fragestellungen anzuwenden. Fermat untersuchte auch umgekehrt die geometrischen Eigenschaften der allgemeinen *algebraischen Kurve*, welche durch die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

beschrieben wird und klassifizierte die resultierenden Kurven als Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln (also Kegelschnitte, Vorführung mit *Mathematica*) oder degenerierte Fälle. Nun begann in der Mathematik die Ära der Betrachtung von Vorgängen einer „stetigen“ Variablen, und durch die Aufstellung einer Gleichung konnten also neue geometrische Kurven betrachtet werden.

³Das üblicherweise angegebene Geburtsjahr 1601 ist vermutlich falsch, wie erst kürzlich von Prof. Klaus Barner (Kassel) [1] nachgewiesen wurde.

3 Mathematik in der Neuzeit

Bis zum siebzehnten Jahrhundert waren die Methoden von Archimedes nicht überall bekannt oder verfügbar. Inzwischen aber war ihre Verbreitung groß, und die Untersuchung weiterer Fragestellungen war in Reichweite. Während man zwar die strenge Beweistheorie der Griechen durchaus anerkannte, war man nun deutlich mehr interessiert an der schnellen Entdeckung neues Wissens.

Christiaan Huygens (1629-1695), s. Abbildung 19, drückte diese weitverbreitete Ansicht 1657 pointiert folgendermaßen aus.

Um die Anerkennung der Experten zu erhalten, ist es nicht von Bedeutung, einen absoluten sicheren Nachweis für eine neue Erkenntnis zu führen. Werden die Erkenntnisse so schön und klar präsentiert wie bei Archimedes, ist dies natürlich großartig. Das erste und Wichtigste ist jedoch die Entdeckung selbst.

Diese Sichtweise ermöglichte auch eine neue intuitivere Betrachtung des Unendlichen. Während die Griechen sich auf geometrische Fragestellungen konzentrierten, wurden mathematische Probleme nun in einer arithmetisierten Form zugänglich.

Johann Kepler (1571–1630), s. Abbildung 20, ist berühmt für seine Entdeckung der *Planetengesetze*. Diese besagen, dass

1. ein Planet sich auf einer Ellipse bewegt, wobei sich die Sonne in einem der beiden Brennpunkte befindet,⁴
2. der Radiusvektor eines umlaufenden Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächeninhalte durchläuft
3. und die Quadrate der Umlaufzeiten umgekehrt proportional zu den Kuben der zugehörigen großen Halbachsen sind.

Eine gewaltige Leistung, diese Gesetze aus den Beobachtungen auf der Erde zu erkennen!

Kepler entdeckte die Planetengesetze, indem er Pythagoras' Ziel, das Auffinden der Harmonie der Himmelsphären, zu vollenden suchte. In seiner kosmologischen Sicht war es kein Zufall, dass die Anzahl der regelmäßigen Polyeder um eins kleiner war als die Anzahl der bekannten Planeten. Er versuchte zu beweisen, dass die Abstände der Planeten von der Sonne durch Kugeln innerhalb regulärer Polyeder gegeben waren.

In seinem 1596 veröffentlichten Buch *Mysterium Cosmographicum* (Das Weltgeheimnis) versuchte Kepler, die Bahnen der damals bekannten fünf Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn mit der Oberfläche der fünf platonischen Körper in Beziehung zu setzen⁵. Die Umlaufbahn des Saturns stellte er sich dabei als Großkreis auf einer Kugel vor – noch nicht als Ellipse, welche einen Würfel (Hexaeder) umschließt. Der Würfel umschließt wiederum eine Kugel, welche die Jupiterbahn beschreiben soll (s. Abbildung 20, Mitte). Diese Kugel wiederum schließt Tetraeder ein, welches die Marskugel umhüllt. Diese Arbeit war nach Keplers Entdeckung des ersten nach ihm benannten Gesetzes – spätestens aber nach der Entdeckung entfernterer Planeten – nur noch von historischem Interesse.⁶

⁴Alle Himmelskörper bewegen sich im Zweikörpersystem auf Kegelschnitten.

⁵Damals waren noch nicht alle Planeten bekannt. Pluto wurde uns inzwischen ja auch wieder als Planet weggenommen! Von seiner Entdeckung 1930 bis zur Neufassung des Begriffs Planet am 24. August 2006 durch die Internationale Astronomische Union (IAU) galt er als der neunte und am weitesten von der Sonne entfernte Planet des Sonnensystems.

⁶Da sich die Astrologie ganz herkömmlich auf Ereignisse in Bezug auf die Oberfläche der Erde bezieht, betrachtet sie die Erde nicht als Planeten.

Newton hat viel später gezeigt, dass die drei Keplerschen Planetengesetze alle aus „seiner“ Gravitationsformel

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

hergeleitet werden können.

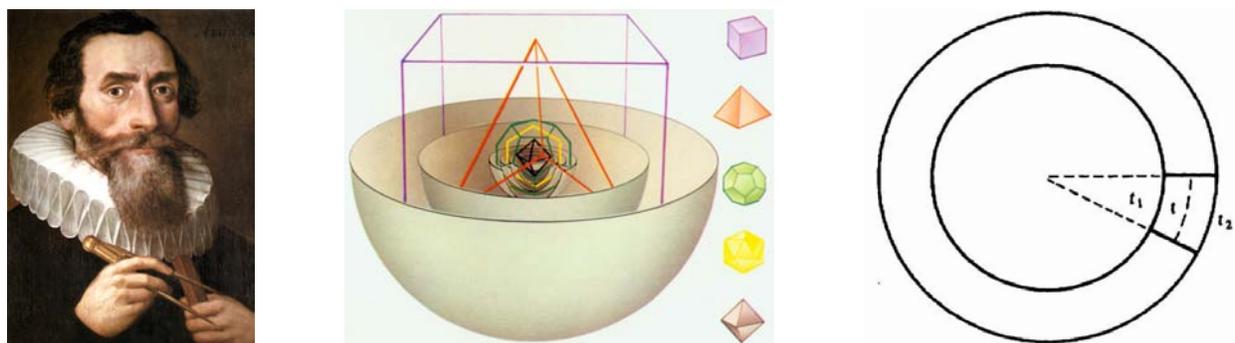


Abbildung 20: Kepler, die Platonischen Körper und der Torus

Kepler konnte aber auch neue Integrationsaufgaben lösen. Er berechnete beispielsweise das Volumen V eines Torus mit Innenradius a und Außenradius b , (s. Abbildung 20, rechts), als das Produkt des Flächeninhaltes des Drehkreises $A = \pi a^2$ mit der Umlaufstrecke seines Zentrums $s = 2\pi b$ (Satz von Pappus)

$$V = A s = 2\pi^2 a^2 b .$$

Er kam auf diese Beziehung, indem er den Torus in unendlich viele „infinitesimale“ zylinderartige Scheiben zerlegte. Das Volumen eines derartigen Torusstückes, welches ja innen dünner ist als außen, ist offenbar ungefähr gleich $A \cdot \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$. Summiert man diese Teilvolumina auf, liefert dies das gewünschte Resultat. Achtung: Hier muss Kepler *infinitesimal* argumentieren, denn für $t \neq 0$ stimmen die verwendeten Formeln nicht exakt.

In seiner Arbeit *Nova stereometria dolorium vinariorum* aus dem Jahr 1615 entwickelte er die *Keplersche Fassregel* zur Bestimmung des Volumeninhaltes eines Fasses. Seine Formel sollte Weinhändlern ermöglichen, den Inhalt ihrer Fässer realistisch beurteilen zu können. Kepler löste also ganz praktische Probleme. Die Keplersche Fassregel ist eine Variante der Simpsonschen Integrationsformel, welche ein Integral durch quadratische Polynome approximiert und eine Formel ergibt, die auch noch für kubische Polynome korrekte Resultate liefert.

Ähnlich wie Huygens schreibt auch Kepler nach der Herleitung einiger ähnlicher Volumenformeln, er könne hierfür archimedisch strenge Beweise führen, „fände er das beschwerliche Lesen derartiger Beweise nicht höchst abstoßend“. Die Zeit war also reif für eine etwas anwendungsorientiertere Sichtweise der Mathematik. Wenn sich eine mathematische Theorie erfolgreich anwenden ließ, galt sie als zufriedenstellend. Eines weiteren Beweises bedarf es dann nicht. Die Axiomatik hatte also zunächst ausgedient und kam erst im 20. Jahrhundert zu einer zweiten Blüte.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), s. Abbildung 22, war dann der erste, der infinitesimale Techniken systematisch benutzte. Dies drückt sich auch im Titel seines Werks *Geometria indivisibilibus* (Geometrie des Unteilbaren) aus. Er benutzte oft eine bekannte Formel und folgerte eine neue, indem er infinitesimale Größen in Übereinstimmung brachte. Diese Methode ergibt gemäß Abbildung 21 die Gleichheit des Volumens einer Pyramide und eines Kegels bei gleicher Grundfläche. Dieselbe Betrachtung gilt auch bei Scherungen. Dies wird das *Cavalierische Prinzip* genannt.

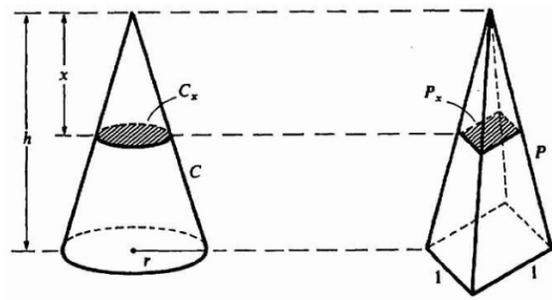


Abbildung 21: Das Cavalierische Prinzip und das Volumen eines Kegels

Er berechnete als erster das Integral

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \quad (11)$$

indem er den Flächeninhalt in geeigneter Weise zerlegte und Analogien sowie Symmetriebetrachtungen benutzte. Er berechnete (11) bis $n = 9$ und konnte dann die allgemeine Formel hieraus erraten. Wir wollen uns Cavalieris Technik für „kleine“ n einmal ansehen.

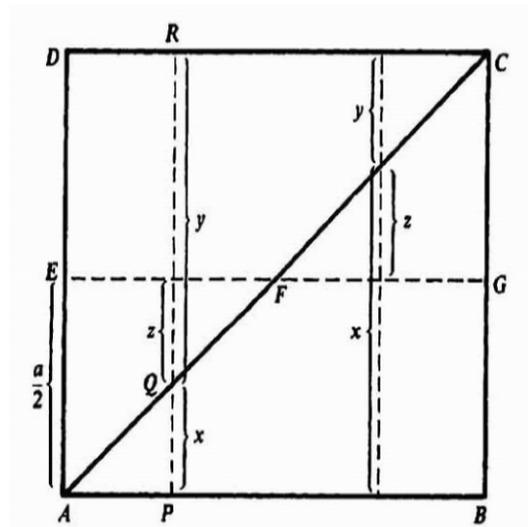


Abbildung 22: Cavalieri und seine Berechnung von $\int_0^a x^n dx$

Aus Abbildung 22 erhalten wir

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x + y) = \sum_A^B x + \sum_A^B y = 2 \sum_A^B x$$

aus Symmetriegründen. Also folgt

$$\sum_A^B x = \frac{1}{2} \sum_A^B a = \frac{1}{2} a^2$$

und in moderner Schreibweise

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2},$$

da $\sum_A^B a$ den Flächeninhalt des Quadrates darstellt.

Analog erhalten wir für $n = 2$

$$\sum_A^B a^2 = \sum_A^B (x+y)^2 = \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy + \sum_A^B y^2 = 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy = 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B \left(\frac{a^2}{4} - z^2 \right),$$

wobei $x = \frac{a}{2} - z$, $y = \frac{a}{2} + z$, s. Abbildung 22. Also folgt

$$\sum_A^B a^2 = 4 \sum_A^B x^2 - 4 \sum_A^B z^2.$$

Hierbei ist $\sum_A^B z^2$ die Summe der Quadrate der Strecken in den *beiden* Dreiecken AEF sowie CFG . Nun repräsentiert *eine* dieser Summen aber das Volumen einer Pyramide, deren Dimension halb so groß ist wie diejenige Pyramide, deren Volumen gleich $\sum_A^B x^2$ ist. Dies liefert

$$\sum_A^B z^2 = \frac{2}{8} \sum_A^B x^2 = \frac{1}{4} \sum_A^B x^2$$

und daher schließlich

$$\sum_A^B x^2 = \frac{1}{3} \sum_A^B a^2 = \frac{1}{3} a^3$$

bzw.

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3},$$

In den ersten beiden Dekaden nach der Publikation des Resultates in Cavalieris Buch (1635) wurden andere Strategien von Fermat, Pascal und Roberval benutzt, die mehr oder weniger rigoreose Beweise dieses Resultats gaben. Eigentlich benötigt man hierfür nur den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Dies ist der höchste Koeffizient in Alhazens Formel für die Potenzsummen. Aus Alhazens Formel kann die Formel (11) natürlich ebenfalls iterativ hergeleitet werden (Übungsaufgabe).

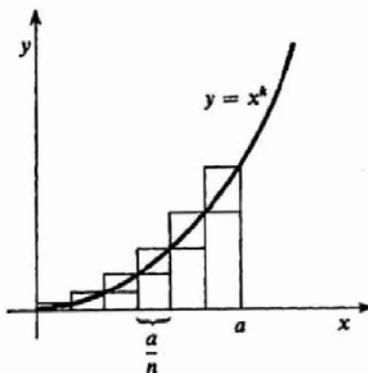


Abbildung 23: Berechnung von $\int_0^a x^n dx$ mit einer arithmetischen Zerlegung

In Abbildung 23 wird der Flächeninhalt unter dem Graph der Potenzfunktion mit Hilfe einer arithmetischen Zerlegung approximiert. Das Intervall $[0, a]$ wird hierbei in n gleichlange Stücke der Länge a/n unterteilt. Die Riemannsche Summe dieser Zerlegung ist dann gegeben durch

$$I = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + n^k)$$

und liefert für $n \rightarrow \infty$ das gewünschte Resultat.



Abbildung 24: Blaise Pascal

Während Alhazens Methode, die Potenzsummen zu erzeugen, sehr kompliziert und langwierig war, entdeckte Blaise Pascal (1623-1662) im Jahr 1654 die explizite Formel

$$\binom{k+1}{k} \sum_{i=1}^n i^k + \binom{k+1}{k-1} \sum_{i=1}^n i^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{1} \sum_{i=1}^n i = (n+1)^{k+1} - (n+1)$$

durch „Spielen mit Eigenschaften des *Pascalschen Dreiecks*“. Diese Beziehung ist mächtiger als Alhazens Methode (*Mathematica*-Vorführung).

Nun konnte man also Potenzen mit ganzzahligen Exponenten integrieren. Was war aber mit gebrochenen Exponenten? Diese Frage stellte sich John Wallis (1616-1703) als erster systematisch. Wallis hatte negative und gebrochene Exponenten in seinem Buch *Arithmetica Infinitorum* 1655 eingeführt, welches später großen Einfluss auf Newton hatte.

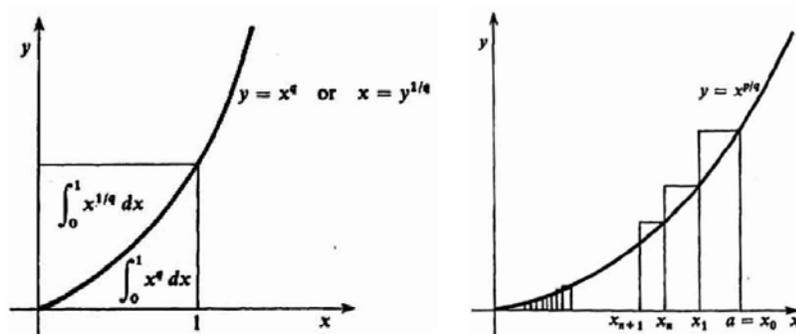
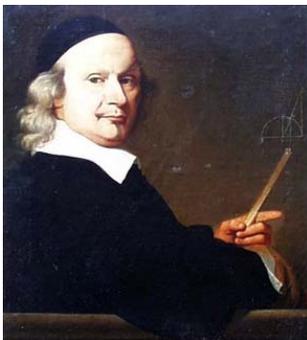


Abbildung 25: John Wallis und Potenzen mit rationalen Exponenten

Will man, dass die Potenzregel

$$x^{p+q} = x^p x^q$$

auch für negative $p, q \in \mathbb{Z}$ gültig bleibt, so bleibt einem gar nichts anderes übrig, als

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

zu setzen, denn dann ist

$$x^{n-n} = x^n x^{-n} = \frac{x^n}{x^n} = 1.$$

Will man weiter, dass die Potenzregel

$$(x^p)^q = x^{pq}$$

auch für gebrochene $p, q \in \mathbb{Q}$ gültig bleibt, so muss man

$$x^{1/n} := \sqrt[n]{x}$$

setzen, damit

$$(x^{-n})^n = (\sqrt[n]{x})^n = 1$$

ist. Diese Schreibweisen sind uns heute ja sehr geläufig. Wallis benutzte noch nicht diese Notation, sondern schrieb „ x vom Index p/q “ für $(\sqrt[q]{x})^p$.

Wallis betrachtete nun Integrale von Funktionen $x^{p/q}$ mit gebrochenen Exponenten. Am Beispiel $a = 1$ und $p = 1$ wollen wir zeigen, wie Wallis diese Integration durchführte und zu der Formel

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q} + 1}$$

geleitet wurde. Aufgrund seiner Rechnungen vermutet er, dass die alte Formel (11) auch für positive rationale Zahlen gilt.

Wir zeigen gemäß Wallis oben angegebenen Spezialfall. Wallis erkennt geometrisch (s. Abbildung 25, Mitte), dass

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{q}} dx + \int_0^1 x^q dx = 1,$$

also

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{q}} dx = 1 - \frac{1}{q+1} = \frac{1}{\frac{1}{q} + 1}.$$

Fermat zeigt die Formel (11) schließlich für beliebige positive rationale Zahlen (s. Abbildung 25, rechts). Er benutzt hierzu eine geometrische Unterteilung des Intervalls statt einer arithmetischen wie Cavalieri, s. Übungsaufgabe.

In der Mitte des 17. Jahrhunderts gab es die ersten Tangentenberechnungen durch Fermat, Descartes, Hudde und Sluse, die aber größtenteils noch recht umständlich waren. Aber erst die Verbindung des Tangentenproblems mit dem Flächeninhaltsproblem, welche am Ende des 17. Jahrhunderts hergestellt wurde, brachte die Entwicklung der Analysis dann fundamental voran. Der erste, der diesbezügliche Ideen aussprach, war Isaac Barrow (1630-1677), der auch das Tangentenproblem nicht wie beispielsweise Descartes durch die Suche nach doppelten Nullstellen löste, sondern durch Erzeugung der Tangente beim Grenzübergang aus Sekanten. Barrow wurde von seinem Schüler Isaac Newton in der Meinung bestätigt, dass diese Methode mächtiger war.

Zu dieser Zeit waren Graphen in der Regel durch implizite Gleichungen gegeben: Zum Beispiel der Kreis durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ oder andere algebraische Kurven in ähnlicher Weise. Wir probieren uns am sogenannten *Descartesschen Blatt*, einer algebraischen Kurve, die für Descartes als Modellbeispiel für die Tangentenbestimmung galt und welche durch die Gleichung

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy = 0$$



Abbildung 26: Isaac Newton (1642-1727) und sein Lehrer Isaac Barrow (1630-1677)

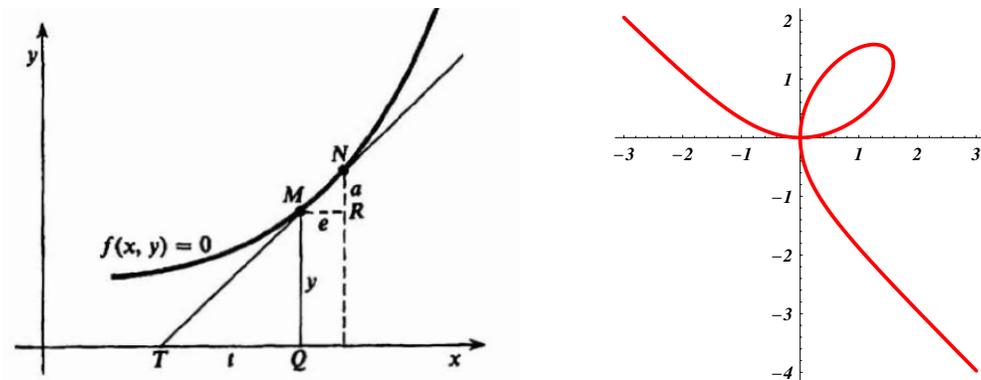


Abbildung 27: Barrows Methode der Tangentenbestimmung und das Descartessche Blatt

gegeben ist, s. Abbildung 27, rechts.

Ist nun zunächst eine Gleichung der Form $f(x, y) = 0$ gegeben, so besteht Barrows Idee darin, sowohl die Koordinate x als auch die Ordinate y infinitesimal zu verrücken. Er betrachtet also $f(x + e, y + a) = 0$ und schlägt dann vor, „alle Terme, welche eine Potenz von a oder e oder ein Produkt hiervon enthalten, zu löschen, da diese *keinen Wert haben*.“ Barrow ist sich also intuitiv bewusst, dass man Terme höherer Ordnung vernachlässigen kann.

Wir erhalten für das Descartessche Blatt

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 - 3(x + e)(y + a) = x^3 + y^3 - 3xy$$

und daher

$$3x^2e + 3xe^2 + e^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 - 3xa - 3ye - 3ae = 0 .$$

Löscht man nun die Terme höherer Ordnung, verbleibt nach Division durch 3

$$x^2e + y^2a - xa - ye = (y^2 - x)a + (x^2 - y)e = 0 .$$

Dies kann nach der Steigung $m = \frac{a}{e}$ aufgelöst werden und liefert schließlich

$$m = \frac{a}{e} = \frac{y - x^2}{y^2 - x} .$$

Barrows Vorform des Hauptsatzes wird durch die physikalische Erkenntnis genährt, dass die zurückgelegte Strecke $y(t)$ eines sich mit Geschwindigkeit $v(t)$ bewegenden Körpers dem Flächeninhalt unter dem Graphen von $v(t)$ entspricht

$$y(t) = \int_a^b v(t) dt ,$$

während die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ eines sich auf der Kurve $y(t)$ bewegenden Körpers durch die Steigung des Graphen gegeben ist

$$v(t) = y'(t) .$$

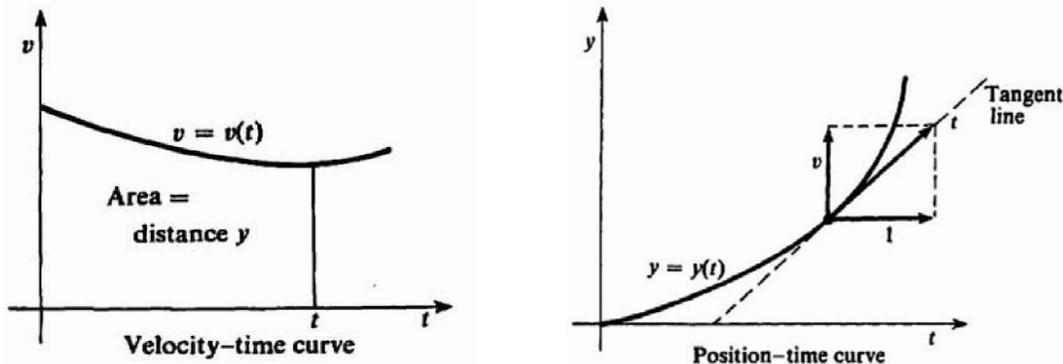


Abbildung 28: Barrows rudimentäre Fassung des Hauptsatzes

Bevor wir zu den weitreichenden Erkenntnissen von Newton und Leibniz kommen, wollen wir uns der Erfindung der Logarithmen widmen, die – in der Person des Schweizer Instrumentenbauers Jost Bürgi (1552–1632) – einen direkten Bezug zu Kassel hat, s [4] und [6]. Jost Bürgi, s. Abbildung 30 links, war von 1579 bis 1604 Hofastronom des Landgrafen Wilhelm IV von Hessen in Kassel.⁷

Wir wollen uns die Bürgischen Ideen genauer ansehen. Stellt man eine arithmetische Progression einer geometrischen gegenüber, so ist letztere exponentiell wachsend. Kehrt man diesen Gedanken um, so wird man auf Logarithmen geführt. Eine möglichst umfassende Liste ermöglicht das Zurückführen einer Multiplikation auf eine (leichtere) Addition. Stellen nämlich $x = ar^m$ und $y = ar^n$ zwei Elemente der geometrischen Progression ar^k dar, so liefert die Multiplikation $xy = ar^{m+n}$, welche – bei geschickt gewähltem a – durch eine Addition der zugehörigen Exponenten (= Logarithmen) mithilfe der zugehörigen arithmetischen Progression kb bewerkstelligt werden kann. Bürgi nannte die Elemente der geometrischen Progression *schwarze Zahlen* und die der arithmetischen Progression *rote Zahlen*.

arithmetische Progression	b	$2b$	$3b$	\dots	mb	\dots	nb	\dots	$(m+n)b$
geometrische Progression	ar	ar^2	ar^3	\dots	ar^m	\dots	ar^n	\dots	ar^{m+n}

Bürgi erstellte eine derartige neunstellige Tabelle mit $a = 10^8$, $b = 10$ und $r = 1 + 10^{-4}$. Damit die Tabelle (bis auf Dezimalshifts) „vollständig“ ist, benötigt man x Eintragungen, wobei

$$(1 + 10^{-4})^x = 10$$

⁷Bürgi ist eine zentrale Figur des Museums für Astronomie und Technikgeschichte in Kassel. John Napier (1550–1617) und Henry Briggs (1561–1630) erfanden die Logarithmen fast zeitgleich. Vielleicht war Bürgi sogar der erste, der eine Logarithmentafel verfasste.



Abbildung 29: Zwei Ausstellungsstücke Jost Bürgis im Kasseler Museum

ist. Bürgi musste also $n = 23.027$ Eintragungen durch sukzessive Multiplikation berechnen, s. auch Abbildung 30 rechts, eine erhebliche Fleißarbeit, wofür er von 20 Jahre benötigte!

Betrachten wir den Bürgischen Logarithmus in der Variante⁸

$$\text{Blog } x = n 10^{-4} \quad \text{für} \quad x = (1 + 10^{-4})^n ,$$

die der Tabelle

$\text{Blog } x$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	\dots	$n \cdot 10^{-4}$	\dots
x	$(1 + 10^{-4})^1$	$(1 + 10^{-4})^2$	\dots	$(1 + 10^{-4})^n$	\dots

entspricht, so erhalten wir für $m = n 10^{-4}$ die Beziehung

$$x = (1 + 10^{-4})^n = \left((1 + 10^{-4})^{10^4} \right)^m ,$$

also

$$\text{Blog } x = n 10^{-4} = m = \log_{(1+10^{-4})^{10^4}} x = \frac{\ln x}{\ln (1 + 10^{-4})^{10^4}} \approx \ln x ,$$

und zwar wegen

$$\ln (1 + 10^{-4})^{10^4} \approx 0,99995$$

auf vier Dezimalstellen genau. Bürgi hat also im wesentlichen den (numerischen) natürlichen Logarithmus entdeckt!⁹

4 Das Zeitalter von Newton und Leibniz

4.1 Unendliche Reihen

Isaac Newton (1642–1727) beschäftigte sich (wahrscheinlich 1667) ebenfalls mit Logarithmen, allerdings von einem ganz anderen Standpunkt aus. Es war damals bereits bekannt, dass der

⁸Nun wissen wir also endlich, was ein Blog ist!

⁹natürlich bis auf einen Faktor 10^5 und eine geringfügige numerische Ungenauigkeit. In [6], S. 78, wird allerdings betont, dass die Idee des natürlichen Logarithmus keineswegs auf Bürgi zurückgeht. Für Bürgi stand als Basis $b = \sqrt[10]{1,0001} \approx 1,0000099995500284979$ im Vordergrund.

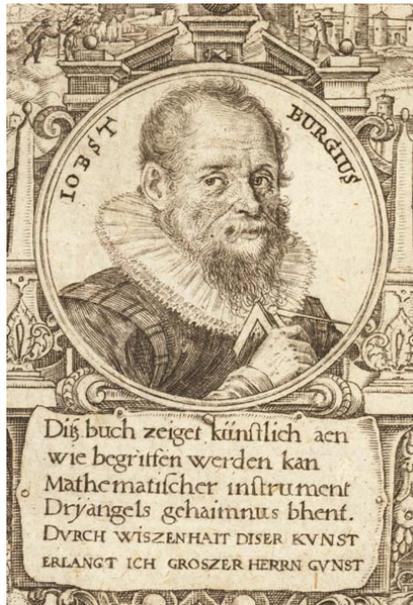


Abbildung 30: Jost Bürgi, das Titelblatt seiner Logarithmentafel von 1620

Flächeninhalt unter einer Hyperbel $y = \frac{1}{1+x}$, also

$$L(a) = \int_0^{a-1} \frac{1}{1+x} dx = \int_1^a \frac{1}{t} dt$$

ebenfalls Logarithmen erzeugt, für welche also die Beziehung

$$L(ab) = L(a) + L(b) \tag{12}$$

gilt (Übungsaufgabe).¹⁰ Erst Euler fand im 18. Jahrhundert heraus, wie diese verschiedenen Logarithmenbegriffe genau zusammenhängen.

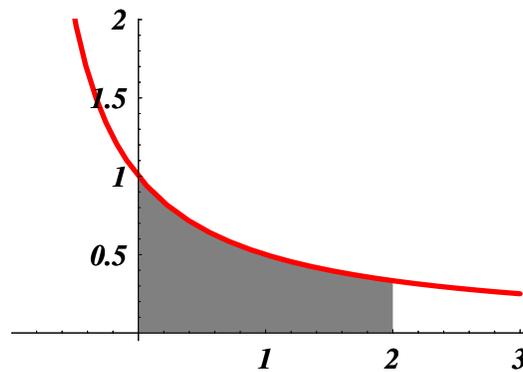


Abbildung 31: Logarithmus als Flächeninhalt unter der Hyperbel

Newton kannte die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm ,$$

¹⁰Natürlich wissen wir heute, dass $L(x) = \ln x = \log_e x$ gilt.

welche auch durch mechanische Polynomdivision entsteht. Integriert man diese Reihe nun gliedweise, so erhält man

$$L(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \quad (13)$$

Diese Reihe heißt (vor allem im angelsächsischen Raum) nach Nicolas Mercator (1620-1687) auch Mercator-Reihe. Hieraus berechnete Newton mit Leichtigkeit numerische Werte der Logarithmusfunktion $L(x)$ und er hatte Spaß daran, diese Berechnungen mit 50-stelliger Genauigkeit durchzuführen (*Mathematica*-Vorführung). Die Konvergenz der Reihe (13) war für Newton selbstverständlich und wurde überhaupt nicht in Frage gestellt. Der heute übliche Konvergenzbegriff wurde erst viel später eingeführt.

Es ist sehr einfach und benötigt nur wenige Anfangsglieder, mittels der Reihe (13) die Logarithmuswerte

$$\begin{aligned} L(0,8) &= -0,22314 \\ L(0,9) &= -0,10536 \\ L(1,1) &= 0,095310 \\ L(1,2) &= 0,18232 \\ L(0,98) &= -0,020203 \end{aligned}$$

zu bestimmen. Hieraus berechnet Newton unter Verwendung des Logarithmusgesetzes (12) die Logarithmen der ersten Primzahlen

$$\begin{aligned} L(2) &= L(1,2) + L(1,2) - L(0,8) - L(0,9) = 0,69315 \\ L(3) &= L(1,2) + L(2) - L(0,8) = 1,09861 \\ L(5) &= L(2) + L(2) - L(0,8) = 1,60944 \\ L(7) &= \frac{1}{2} \left(L(2) + 2L(5) + L(0,98) \right) = 1,94591 \quad \text{usw. ,} \end{aligned}$$

aus welchen sich dann schließlich alle Logarithmen berechnen lassen. Newton führe seine Berechnungen mit 57 Dezimalstellen durch. Ihm war durchaus bewusst, dass beim Rechnen mit Dezimalzahlen Rundungsfehler entstehen. Er war zufrieden, wenn bei seinen Berechnungen 50 Dezimalstellen übereinstimmten.

Zwei Hauptingredienzien haben die Entwicklung der Analysis am Ende des 17. Jahrhundert vorangebracht: Das Arbeiten mit unendlichen Reihen wie eben gesehen und die Entwicklung eines einfachen Differentiationskalküls durch Newton und Leibniz, der – in Zusammenhang mit dem Hauptsatz – dann auch die Fragestellungen der Integralrechnung beflügelte.

Eines der Hauptresultate der ersten Art war die Entwicklung der binomischen Reihe durch Newton um 1665.¹¹ Während der binomische Lehrsatz

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ möglicherweise Pascal bekannt war, der sich ja ausführlich mit dem *Pascalschen Dreieck* beschäftigt hatte, war für die auftretenden Binomialkoeffizienten keineswegs eine einfache Formel bekannt. Daher ist die Weitsicht Newtons hoch einzuschätzen, der die Formel

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (14)$$

¹¹Eine korrekte Datierung bei Newton ist schwierig, da er dazu tendierte, seine Ergebnisse für sich zu behalten. Obiges Datum ist in einem Brief angegeben, den Newton 1676 an den Sekretär der Royal Society of London Henry Oldenburg zur Weitergabe an Leibniz sandte.

unter konkreter Angabe der Koeffizienten

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (15)$$

„erriet“. Nicht nur sagte er korrekt voraus, dass die Reihe nun unendlich wird, folgende Hürde kam hinzu. Die Betrachtung nicht ganzzahliger Exponenten war absolut neu. Auch Wallis hatte seine Entdeckung nicht explizit publiziert und sprach ja noch vom Index. Newton betrachtete aber durchaus Reihen wie

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots$$

oder

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

als Spezialfälle von (15), letztere Reihe vor allem deshalb, weil Newton an der Kreisformel $y = \sqrt{1-x^2}$ interessiert war. Newtons Originalversion der binomischen Formel vom 3. Juni 1676 hatte übrigens folgende Gestalt:

Die Berechnung von Wurzeln wird wesentlich vereinfacht durch das Theorem

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}$$

wobei $P + PQ$ diejenige Zahl darstellt, deren Wurzel (oder Potenz) gesucht ist; P stellt den ersten Teil dieser Zahl dar, Q den Rest dividiert durch den ersten Term und m/n den numerischen Index, ob er nun ganzzahlig oder gebrochen ist.

Hierzu ist zu bemerken, dass jeder der auftretenden Terme A, B, C, D, \dots den unmittelbar vorherigen Term bezeichnet. Beispielsweise sind $A = P^{m/n}$ und $B = \frac{m}{n}AQ$ etc. Man mache sich klar, dass dies eine Variante des Binomischen Satzes ist. Indem man die angegebene Reihe in der Form $(P + PQ)^{m/n} = a_0 + a_1 + \dots$ schreibt, folgt nämlich

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha - k}{k + 1}$$

mit $\alpha = \frac{m}{n}$ (Übungsaufgabe), also (14).

Mit der binomischen Reihe kann man nun – wie Newton begründet – ganz leicht numerisch Wurzeln berechnen. Als Beispiele betrachten wir

$$\sqrt{2} = (1+1)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \approx 1,41421.$$

Dies konvergiert aber nicht sehr schnell und man muss viele Summanden bestimmen. Daher rechnet Newton lieber

$$\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \frac{(-1)^k}{2^k} \approx 1,41421,$$

was viel schneller zum Erfolg führt. Ebenso erhält man beispielsweise mit wenigen Summanden

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8 \cdot \frac{7}{8}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{1/3} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} \frac{1}{8^k} \approx 1,91293.$$

Bevor wir die Technik analysieren, mit welcher sich Newton – nach einer Idee von Wallis – (15) erschloss, wollen wir als Beispiel π approximieren, was nun ganz leicht fällt. Newton schrieb für den Flächeninhalt eines Viertelkreises

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} - \frac{21}{13312} \dots$$

und er erhielt mit Leichtigkeit eine Approximation von π . Viel einfacher und genauer geht es aber mit der Darstellung

$$\pi = 8 \left(\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{4} \right) \approx 3,14159,$$

s. Abbildung 32 (*Mathematica*-Vorführung und Übungsaufgabe).

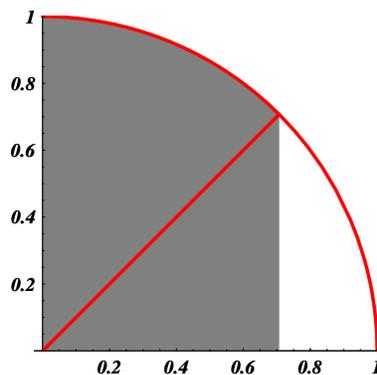


Abbildung 32: Berechnung von π durch Reihenentwicklung von $\sqrt{1-x^2}$.

Wie haben Wallis und Newton den binomischen Satz erraten? Wir sehen uns die Vorgehensweise von Wallis an, der den Spezialfall halbzahlgiger Exponenten betrachtete. Wir setzen mit Wallis

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx =: \frac{1}{\square} \quad (16)$$

und schreiben \square für den Kehrwert dieses Integrals. Kennt man

$$\int_0^1 x^{q/p} dx = \frac{p}{p+q},$$

so kann man für $p, q \in \mathbb{N}$ durch Ausmultiplizieren auch Integrale der Form

$$\int_0^1 (1-x^{1/p})^q dx$$

berechnen. Beispielsweise ergibt sich

$$\int_0^1 (1-x^{1/3})^2 dx = \int_0^1 (1-2x^{1/3}+x^{2/3}) dx = 1 - 2\frac{3}{1+3} + \frac{3}{2+3} = \frac{1}{10}.$$

Dummerweise ist (16) nicht von dieser Gestalt, aber – wenn man die Werte für $p, q \in \mathbb{N}$ bestimmen kann – warum nicht für $p, q = \frac{1}{2}$?

Wallis setzt

$$f(p, q) := \frac{1}{\int_0^1 (1-x^{1/p})^q dx}$$

und berechnet eine Tabelle dieser Werte. Wir erhalten mit *Mathematica* die Tabelle

Table $\left[\frac{1}{\int_0^1 (1-x^{1/p})^q dx}, \{p, 1, 10\}, \{q, 0, 10\} \right]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Aus dem Ergebnis schließt Wallis, dass

$$f(p, q) = \binom{p+q}{p}$$

ist, m. a. W., Wallis nahm an, dass man die Einträge dieser Tabelle als Summe der beiden Einträge direkt darüber und links davon berechnen kann

$$f(p, q) = f(p-1, q) + f(p, q-1). \quad (17)$$

Wallis erkennt weiter, dass die zweite Zeile ($p = 2$) aus den *Dreieckszahlen* 1, 3, 6, 10, 15, ... besteht (Zeichnung), für welche die Formel

$$f(2, q) = \frac{(q+1)(q+2)}{2} \quad (18)$$

gültig ist. In der dritten Reihe stehen die *Pyramidenzahlen* 1, 4, 10, 20, 35, ... mit der Formel

$$f(3, q) = \frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6}. \quad (19)$$

Also gilt „generell“

$$f(p, q) = \frac{(q+1)(q+2)\cdots(q+p)}{p!}.$$

Nun möchte Wallis die Tabelle durch Interpolation ergänzen, indem er zwischen je zwei Zeilen und zwischen je zwei Spalten jeweils eine weitere einfügt. Er verwendet zunächst mutig die Formeln (18)–(19) und erhält für halbzahliges q

$$f\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{2}$$

oder auch

$$f\left(2, \frac{5}{2}\right) = \frac{\left(\frac{5}{2}+1\right)\left(\frac{5}{2}+2\right)}{2} = f\left(2, \frac{5}{2}\right).$$

Wegen der Symmetrie der Tabelle hat man damit auch die Werte $f(p, q)$ für halbzahliges p . Man beachte aber, dass man so noch keine Werte erhält, falls sowohl p als auch q halbzahlig sind. Dies liefert Tabelle 1, wobei wir die interpolierten Werte rot dargestellt haben.

$p \backslash q$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
0	1	1	1	1	1	1	1	...
$\frac{1}{2}$	1	\square	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{16}$...
1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	...
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{105}{16}$...
2	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	...
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{8}$	$\frac{231}{16}$...
3	1	$\frac{35}{16}$	4	$\frac{105}{16}$	10	$\frac{231}{16}$	20	...

Tabelle 1: Wallis' Interpolation der Binomialkoeffizienten: Teil 1

Wie findet man nun die noch fehlenden Werte? Wallis bemerkt, dass die Rekursion

$$\frac{f(p, q)}{f(p, q-1)} = \frac{p+q}{q} \quad (20)$$

für ganzzahlige p, q immer gültig ist und hofft, dass sich diese Regel auf halbzahlige p, q fortsetzen lässt. Immerhin stellt er fest, dass diese Regel für die bereits eingetragenen halbzahligen Werte gilt, beispielsweise

$$\frac{f(\frac{3}{2}, 3)}{f(\frac{3}{2}, 2)} = \frac{105}{16} \cdot \frac{8}{35} = \frac{3}{2} = \frac{\frac{3}{2} + 3}{3}.$$

Benutzt man nun diese Regel zusammen mit der Regel des Pascalschen Dreiecks (17), so lassen sich alle restlichen Werte eintragen, und sie sind rationale Vielfache von \square . Dies liefert schließlich Tabelle 2, deren blaue Eintragungen neu sind.

$p \backslash q$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
0	1	1	1	1	1	1	1	...
$\frac{1}{2}$	1	\square	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3} \square$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5} \square$	$\frac{35}{16}$...
1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	...
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{4}{3} \square$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3} \square$	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15} \square$	$\frac{105}{16}$...
2	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	...
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{8}{5} \square$	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15} \square$	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15} \square$	$\frac{231}{16}$...
3	1	$\frac{35}{16}$	4	$\frac{105}{16}$	10	$\frac{231}{16}$	20	...

Tabelle 2: Wallis' Interpolation der Binomialkoeffizienten: Teil 2

Was haben wir nun davon? Wir kommen nun zu den definierenden Integralen zurück. Per definitionem gilt ja

$$\square = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx} = \frac{4}{\pi}.$$

Damit ist Tabelle 2 vollständig.

Als Bonus erhält Wallis auch noch sein berühmtestes Resultat: Das *Wallische Produkt*. Setzt man

$$b_n := \frac{1}{\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx},$$

so ist diese Folge aus geometrischen Gründen offenbar streng monoton steigend. Man erhält ferner aus der Rekursion (20) mit Induktion

$$b_n = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n+1}{n},$$

falls n gerade ist und

$$b_n = \frac{\square}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n},$$

falls n ungerade ist. Kombinieren wir dies, so folgt aus der Monotonie $b_{2n-1} < b_{2n} < b_{2n+1}$ die Beziehung

$$\frac{\square}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} < \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k} < \frac{\square}{2} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k-1}.$$

Nach Umstellung erhalten wir

$$\prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} < \frac{2}{\square} < \frac{2n+2}{2n+1} \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

und folglich für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{2}{\square} = \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots.$$

Newton nutzte schließlich Wallis' Interpolationsmethode weiter aus, indem er sie statt auf die Zahlenfolge

$$a_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n/2} dt$$

auf die Polynomfolge

$$f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^{n/2} dt$$

anwandte, und kam so schließlich auf die Binomische Formel.

4.2 Newtons Fluxionen und Leibnizsche Notation

Newton führte seine Fluxionen in *The October 1666 Tract on Fluxions* ein. Er war wieder – wie viele vor ihm – von einer physikalischen Idee motiviert und betrachtete eine implizit gegebene Funktion $f(x, y) = 0$ als Bahnkurve eines bewegten Körpers mit den Koordinatenfunktionen $x(t)$ und $y(t)$, wobei $t \in [a, b]$ ein bestimmtes Zeitintervall durchläuft, s. Abbildung 33.

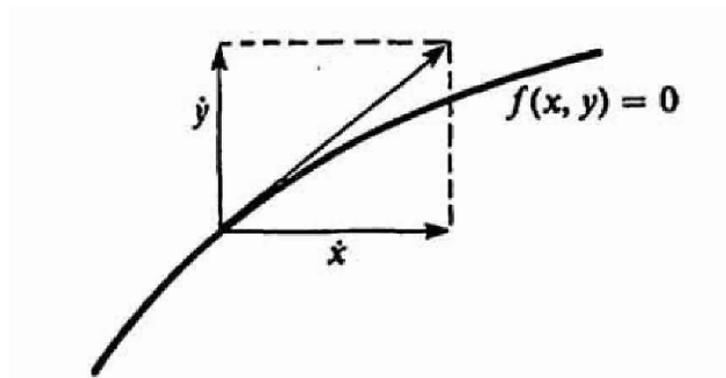


Abbildung 33: Newtons Fluxionen

Der Geschwindigkeitsvektor des Körpers setzt sich aus den von Newton so genannten *Fluxionen* $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ zusammen und liefert die Steigung des Graphen

$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} .$$

Die linke Notation ist die heutige „moderne“ Notation, die auf Leibniz zurückgeht und von Newton niemals verwendet wurde. Dazu später mehr.

Newton gibt nun für die Fluxionen einer polynomial gegebenen impliziten Funktion

$$f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j \quad (21)$$

die Formel

$$\sum \left(\frac{i \dot{x}}{x} + \frac{j \dot{y}}{y} \right) a_{ij} x^i y^j = 0$$

an. Newton begründet dies wie folgt: Bewegen sich zwei Körper mit konstanter Geschwindigkeit, so sind die zurückgelegten Strecken proportional zu den Geschwindigkeiten. Wenn aber die Geschwindigkeit nicht konstant ist, so ist sie dennoch in einem kleinen Zeitintervall praktisch konstant. „Für unendlich kleines o “ wird an der Stelle $x + \dot{x} o$ also der Wert $y + \dot{y} o$ erreicht. Setzt man dies nun in (21) ein, so erhält man mit der binomischen Formel

$$\begin{aligned} 0 &= \sum a_{ij} (x + \dot{x} o)^i (y + \dot{y} o)^j \\ &= \sum a_{ij} x^i y^j + \sum a_{ij} x^i (j y^{j-1} \dot{y} o + \dots) + \sum a_{ij} y^j (i x^{i-1} \dot{x} o + \dots) \\ &\quad + \sum a_{ij} (i x^{i-1} \dot{x} o + \dots) (j y^{j-1} \dot{y} o + \dots) = 0 . \end{aligned}$$

Newton lässt nun – wie Barrows – aufgrund der linearen Approximation der Geschwindigkeit Potenzen höherer Ordnung von o weg. So erhält er also

$$\sum a_{ij} (i x^{i-1} \dot{x} o + j y^{j-1} \dot{y} o) = 0$$

und Division durch o liefert das gewünschte Resultat.

Aus diesem allgemeinen Satz kann man nun leicht beispielsweise die Ableitung der gebrochenen Potenz $y = x^{p/q}$ bestimmen. Es ist $f(x, y) = y^q - x^p = 0$ und somit für die Fluxionen $q \dot{y} y^{q-1} - p \dot{x} x^{p-1} = 0$. Hieraus folgt

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{p x^{p-1}}{q y^{q-1}} = \frac{p x^{p-1}}{q x^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} .$$

Die Kettenregel ist ebenfalls in Newtons Fluxionenkalkül „eingebaut“ und sieht (am Beispiel) wie folgt aus. Sei

$$y = (1 + x^n)^{3/2} ,$$

und wir suchen die Ableitung \dot{y}/\dot{x} . Hierzu verwendet Newton eine neue Variable $z = 1 + x^n$ mit Fluxion

$$\dot{z} = n x^{n-1} \dot{x} .$$

Wegen $y^2 = z^3$ ist also

$$2 y \dot{y} = 3 z^2 \dot{z} .$$

Somit ist schließlich

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{z}} \cdot \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{3z^2}{2y} \cdot n x^{n-1} = \frac{3n x^{n-1} (1 + x^n)^2}{2(1 + x^n)^{3/2}} = \frac{3}{2} n x^{n-1} \sqrt{1 + x^n} .$$

Auch Produkt- und Quotientenregel waren Newton geläufig, auch wenn er sie ebenfalls nur an Beispielen vorführte. Newton schreibt auch den Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung in seinem 1666 Artikel zum ersten Mal auf. Aus dem Hauptsatz und der Kettenregel leitet Newton eine Substitutionsmethode her, mit welcher er eine formidable Integraltafel zustande bringt. Newton formuliert auch das Prinzip, dass für ein lokales Extremum $f'(x) = 0$ gilt.

Newton findet als erster die Reihen der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus. Wie geht Newton vor? Zunächst bestimmt er die Reihe der Arcussinusfunktion, die er dann invertiert. Möglicherweise wendet er hierfür sogar das *Newtonverfahren* an!

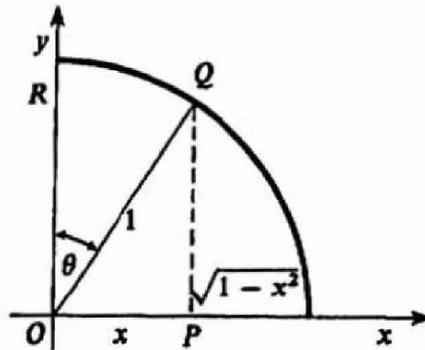


Abbildung 34: Zur Bestimmung der Arcussinusreihe

Der Winkel $\theta = \arcsin x$ in Abbildung 34, gemessen in Radian, also Vielfachen des Umfangs des Einheitskreises, kann aufgefasst werden als der doppelte Flächeninhalt des Kreissegments OQR (warum?). Auf der anderen Seite folgt durch Integration der Binomialreihe für den Flächeninhalt des Segments $OPQR$

$$\begin{aligned} \text{area}(OPQR) &= \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{16}t^6 - \frac{5}{128}t^8 - \dots \right) dt \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \dots \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \arcsin x &= 2 \text{ area}(OQR) = 2 \text{ area}(OPQR) - x\sqrt{1-x^2} \\ &= 2 \left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \dots \right) - x\sqrt{1-x^2} \\ &= 2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{56}x^7 - \frac{5}{576}x^9 - \dots \\ &\quad - \left(x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^7 - \frac{5}{128}x^9 - \dots \right) \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots \end{aligned}$$

Der Ansatz für die inverse Reihe liefert hieraus (Übungsaufgabe)

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + \dots$$

Newton extrahiert schließlich das „offensichtliche“ Muster

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

nachdem er diese Rechnung bis zur Ordnung 21 durchgeführt hat! Setzt man $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, so erhält man

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + \dots,$$

und ebenfalls „offensichtlich“

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$



Abbildung 35: Gottfried von Leibniz, Jakob und Johann Bernoulli

Newton hat seine Ergebnisse zunächst nicht veröffentlicht. Nachdem auch Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646–1716)¹², s. Abbildung 35 links, den Differential- und Integralkalkül erfunden hatte, ließ Newton 1676 viele seiner Ergebnisse über Henry Oldenburg, Sekretär der Royal Society of London, an Leibniz senden, um den Prioritätenstreit für sich zu entscheiden. Zweifellos war Newton etwas schneller. Aber seine Fluxionen waren bei weitem nicht so suggestiv wie die Notationen von Leibniz (1675)

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \int f(x) dx,$$

die die Gültigkeit der Kettenregel

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

als Kürzungsregel darstellt und auch gleich den Beweis mitliefert sowie beispielsweise die Integralsubstitution zu einem rein formalen Trick macht. Auch heute noch heißt die Regel für höhere Ableitungen

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

die *Leibnizsche Regel*. Leibniz führte auch das heutige Integralzeichen ein. Die geschickt gewählten Notationen halfen wesentlich dabei mit, die Differential- und Integralrechnung auf dem Festland zu etablieren. Die Mathematik in England sollte sich dagegen erst viel später weiterentwickeln, zu sehr beharrte man auf der Verwendung der Newtonschen Fluxionen.

¹²Jurist, Naturwissenschaftler, Politiker, Philosoph, Historiker, Theologe und Diplomat. Er wird von manchen als *letzter Universalgelehrter* bezeichnet.

Man sollte aber auch erwähnen, dass Newton nicht nur die Differential- und Integralrechnung entwickelte, sondern dass er gleichzeitig die Physik revolutionierte, indem er das Gravitationsgesetz

$$F \sim \frac{m M}{|y_2(t) - y_1(t)|^2}$$

sowie die *Newtonschen Gesetze*, insbesondere Kraft = Masse mal Beschleunigung, aufstellte und zeigte, wie man mit Techniken der Integralrechnung hieraus die drei Keplerschen Gesetze herleiten kann (Übungsaufgabe).

Zum Abschluss dieses Abschnitts möchte ich die Integration rationaler Funktionen ansprechen. Leibniz war sich klar, wie man ein Polynom integriert. Er fragte sich, ob sich auch jede rationale Funktion elementar integrieren lässt. Hier blieb er sich unsicher, da er die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

nicht bestimmen konnte. Dies lag daran, dass es ihm nicht gelang, den Nenner zu faktorisieren. Eine Faktorisierung des Nenners in quadratische Faktoren liefert mittels einer Partialbruchzerlegung sofort das Resultat. Hätte Leibniz mit komplexen Zahlen gerechnet, die damals immer noch nicht anerkannt waren, so hätte er das Problem lösen können. Die dritte binomische Formel liefert

$$x^4 + 1 = (x^2 + i)(x^2 - i).$$

und hieraus kann man mittels der *pq*-Formel auch (komplexe) lineare Faktoren finden (Übungsaufgabe)

$$x^4 + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right).$$

Aber nun sind alle Faktoren komplex. Fasst man allerdings jeweils zwei Faktoren wieder geschickt zusammen, so erhält man die reelle Faktorisierung

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1),$$

welche Leibniz' Fragestellung löst. Dies fand sein „wissenschaftlicher Ziehsohn“ Johann Bernoulli (1667–1748), s. Abbildung 35 rechts, heraus.

5 Leonhard Euler

Der schweizerische Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), s. Abbildung 36–37, dessen Geburtstag sich 2007 zum dreihundersten Mal jährte, war wahrscheinlich der produktivste Mathematiker aller Zeiten. Selbst, als er im Alter vollständig erblindet war, publizierte er noch mehr als jeder andere Kollege auf der Welt. Seine Gesammelten Werke umfassen insgesamt 75 Bände. Nachdem er in Basel keine Anstellung fand, arbeitete er in St. Petersburg (1727–1741 sowie 1766–1783) an der Akademie der Wissenschaften der Zarin Katharina der Großen und in Berlin (1741–1766) an der Berliner Akademie Friedrichs des Großen.

Seine Arbeit war zunächst stark beeinflusst von Johann Bernoulli. Johanns Bruder Jacob Bernoulli (1655–1705), der auch Mathematiker war, hatte übrigens das Wort *Integral* eingeführt. Leibniz hatte die Integralrechnung noch *calculus summatorius* genannt, während sich nun der Begriff *calculus integralis* einbürgerte.

Johann Bernoulli schrieb 1691–1692 zwei kurze Abhandlungen über die Differential- und Integralrechnung, die aber unveröffentlicht blieben. Er unterrichtete diese Dinge auch dem Marquis de



Abbildung 36: Leonhard Euler, der produktivste Mathematiker aller Zeiten

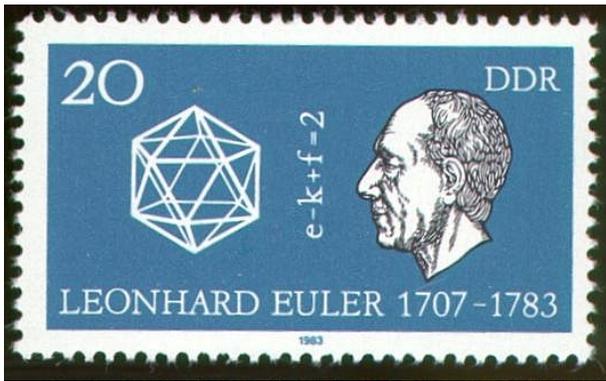


Abbildung 37: Briefmarken zu Eulers Ehren

l'Hospital, der daraufhin 1696 das erste Buch über Differentialrechnung veröffentlichte, welches den Titel *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* hatte. Daher kennen wir heute noch die *de l'Hospital'sche Regel*, welche allerdings von Johann Bernoulli stammt. Das Argument, das vorgetragen wird, kann durch die Gleichungskette

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(a + dx)}{g(a + dx)} = \frac{f(a) + f'(a) dx}{g(a) + g'(a) dx} = \frac{f'(a) dx}{g'(a) dx} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

beschrieben werden, wenn $f(a) = g(a) = 0$ angenommen wird.

Wenn auch de l'Hospital das erste Buch zur Differentialrechnung geschrieben hatte, so war es dennoch ohne Frage Eulers *Introductio in analysin infinitorum* [3] aus dem Jahr 1748, welches ein neues Zeitalter einläutete. Euler war die algebraisch systematische Einführung der Analysis so wichtig, dass man in seinem ganzen Werk absichtlich *keine einzige Zeichnung* finden wird. Dies ist zwar bis heute aus didaktischer Sicht sicher sehr zweifelhaft, aber Euler hatte gute Gründe, waren doch viele der Argumente seiner Vorgänger, ob sie nun physikalischen oder geometrischen Ursprungs waren, doch ziemlich undurchsichtig. Daher erfand er die Analysis sozusagen nochmals neu, und zwar ohne Bezug zur geometrischen Anschauung zu nehmen.

Nach seinem Buch könnte man noch heute eine Analysisvorlesung halten, wenn man es etwas dem heutigen Sprachgebrauch anpasst und natürlich mit der geometrischen Anschauung verbindet. Aber Achtung: Wie alle bedeutenden Werke der damaligen Zeit war sein Buch natürlich in lateinischer Sprache geschrieben. In diesem Buch werden zum ersten Mal *Logarithmen* als Exponenten eingeführt. Auch werden von Euler konsequent *Funktionen* benutzt. Wir erinnern uns, dass bislang

immer von Kurven die Rede war, die *implizit* durch eine Gleichung gegebenen waren. Allerdings ist für Euler eine Funktion noch ein *analytischer Ausdruck* und keine Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Er definiert eine Funktion wie folgt

Eine Funktion einer variablen Größe ist ein analytischer Ausdruck, der auf beliebige Art und Weise von der variablen Größe und von anderen Parametern oder Konstanten abhängt.

Wir werden gleich verstehen, was er mit analytisch meint. Auch werden von Euler konsequent *Reihen* und Grenzwertbildungen benutzt, auch wenn ihm die heutige Epsilontik fehlte. Die Benutzung von Reihen und die Bildung von Grenzwerten meint er, wenn er „auf beliebige Art“ schreibt. Konsequenter und ohne jede Scheu verwendet Euler komplexe Zahlen.

In der heutigen Mathematik erinnert uns noch vieles an Euler: Die Eulersche Konstante

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7182818284590452353602874713526624977572470937000\dots,$$

die Euler-Mascheronische Konstante

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,5772156649015328606065120900824024310421593351939\dots$$

und nicht zuletzt die *Eulersche Identität*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

welche im Spezialfall $x = \pi$ in die Form

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

gebracht werden kann, eine Formel, welche die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik in Beziehung zueinander setzt.

5.1 Exponential- und Logarithmusfunktion

Euler arbeitet mit beliebig kleinen Zahlen (ε) und mit beliebig großen Zahlen (N) und rechnet mit diesen Zahlen (intuitiv) unter Benutzung der üblichen Rechenregeln unter Verwendung einiger Anpassungen.

Er erklärt in Kapitel 6 seiner *Introductio* den Logarithmus zur Basis a , also $\log_a x$, als denjenigen Exponenten y , für welchen die Gleichung $a^y = x$ gilt. Da $a^0 = 1$ ist, schreibt er in Kapitel 7 für beliebig kleines ε

$$a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon.$$

Es wird sich herausstellen, dass k konstant ist, und zwar $k = \log_e a$ (Übungsaufgabe).¹³

Sei nun x eine „endliche Zahl“ ($x \in \mathbb{R}$ oder auch $x \in \mathbb{C}$), so führt Euler die unendlich große Zahl $N := \frac{x}{\varepsilon}$ ein. Er rechnet nun unter Zuhilfenahme des binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned} a^x &= a^{N\varepsilon} = (a^\varepsilon)^N \\ &= (1 + k\varepsilon)^N = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N \\ &= 1 + N \frac{kx}{N} + \frac{N(N-1)}{N^2} \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} \frac{(kx)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \dots, \end{aligned}$$

¹³Wir würden heute natürlich k als Grenzwert aufschreiben: $k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$.

weil

$$1 = \frac{N(N-1)}{N^2} = \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} = \dots,$$

denn N ist ja unendlich groß.¹⁴

Substituiert man $x = 1$, so erhält man

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots$$

einen Zusammenhang zwischen a und k . Euler führt nun als die zu $k = 1$ gehörige Zahl a seine berühmte Zahl

$$a = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

ein und bestimmt sie sogleich auf 23 Dezimalstellen genau

$$e = 2,71828182845904523536028\dots$$

Die Reihe konvergiert sehr schnell. Setzen wir dieses spezielle $k = 1$ und somit $a = e$ einmal in die Gleichung oben ein, so erhalten wir

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N, \quad (22)$$

was in heutiger Notation

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

ergibt.

Jetzt sehen wir uns die Logarithmen an. Euler schreibt

$$y = a^x = a^{N\varepsilon} = (a^\varepsilon)^N = (1 + k\varepsilon)^N. \quad (23)$$

Gemäß der ersten Gleichung ist

$$\log_a y = x,$$

und es folgt aus (23)

$$1 + k\varepsilon = y^{1/N},$$

also

$$\varepsilon = \frac{y^{1/N} - 1}{k},$$

und es folgt für den Logarithmus

$$\log_a y = x = N\varepsilon = \frac{N}{k} (y^{1/N} - 1).$$

Speziell für $a = e$ und somit $k = 1$ und erhalten wir

$$\log_e y = N\varepsilon = N (y^{1/N} - 1) \quad (24)$$

oder in heutiger Notation

$$\log_e y = \lim_{n \rightarrow \infty} n (y^{1/n} - 1).$$

¹⁴Wir rümpfen heute möglicherweise hierüber die Nase, denn hier wurden „unerlaubt“ Grenzprozesse vertauscht. Aber es geht ja alles gut... Euler hatte hierfür fast immer ein gutes Gespür.

Euler zeigt nun, dass e die Basis der hyperbolischen Logarithmen ist, welche Newton studiert hatte, indem er Mercators Reihe herleitet. Wir bekommen zunächst aus der binomischen Reihe

$$(1+x)^{1/N} = 1 + \frac{1}{N}x + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)(\frac{1}{N}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

und somit aus (24) nach der Substitution $y = 1+x$

$$\begin{aligned} \log_e(1+x) &= N((1+x)^{1/N} - 1) \\ &= N\left(\frac{1}{N}x + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)(\frac{1}{N}-2)}{3!}x^3 + \dots\right) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots, \end{aligned}$$

da N ja unendlich groß ist. Dies ist die Reihe, die wir mit Newton gemäß (13) als

$$\log_e(1+x) = L(1+x) = \int_1^x \frac{1}{1+t} dt$$

identifizieren. Also ist e die Basis der hyperbolischen Logarithmen, welche wir heute *natürliche Logarithmen* nennen und mit $\ln = \log_e$ bezeichnen.

Wie kam Euler auf die Definition der Exponentialfunktion? Er hat sich vermutlich überlegt, wie die Folge y_n beschaffen sein muss, damit für $(1+y_n)^n$ ein Grenzwert existiert. Die Binomialreihe liefert

$$(1+y_n)^n = 1 + n y_n + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 + \dots,$$

und dies konvergiert offenbar nur dann gegen einen von 1 oder ∞ verschiedenen Wert, wenn $n y_n$ konvergiert, sagen wir gegen x , also $y_n = \frac{x_n}{n}$ mit einer gegen x konvergierenden Folge x_n . Die Logarithmusreihe zeigt uns dann im übrigen, dass $(1 + \frac{x_n}{n})^n$ immer gegen e^x konvergiert, weil

$$\ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right) = n\left(\frac{x_n}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} + \frac{x_n^3}{3n^3} \mp\right) = x_n - \frac{1}{n}\left(\frac{x_n^2}{2} - \frac{x_n^3}{3n} \pm\right) \rightarrow x,$$

denn die letzte Klammer konvergiert offenbar gegen x^2 .

5.2 Die trigonometrischen Funktionen

Damit hat Euler also als erster die elementaren Exponential- und Logarithmus-Funktionen in unserem heutigen Sinn eingeführt und verstanden. Aber damit nicht genug. Auch die trigonometrischen Funktionen führt er in Kapitel 8 seiner *Introductio* nun ein, indem er konsequent mit komplexen Zahlen arbeitet, und er findet eine Verbindung zur Exponentialfunktion.

Er erklärt $\cos x$ und $\sin x$ in der heute üblichen Form als die kartesischen Koordinaten bei Messung des Winkels x in Radian, also als Vielfaches des Kreisumfangs, s. Abbildung 38. Hieraus folgt natürlich mit dem Satz von Pythagoras sofort die Identität

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Als nächstes gibt Euler die Additionstheoreme in der uns gebräuchlichen Form

$$\sin(y \pm z) = \sin y \cos z \pm \cos y \sin z$$

$$\cos(y \pm z) = \cos y \cos z \mp \sin y \sin z$$

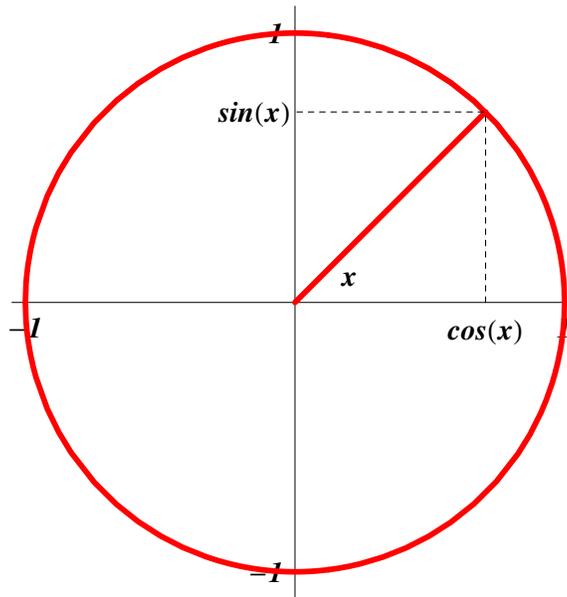


Abbildung 38: Definition von $\cos x$ und $\sin x$ nach Euler

an. Jetzt wird es wieder spannend. Euler beweist durch unvollständige Induktion mittels der Additionstheoreme, dass für $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ die *Moivresche Identität*

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos(nz) \pm i \sin(nz)$$

gilt, welche also von Euler stammt (Übungsaufgabe: vollständige Induktion).

Nun sei wieder $z = \varepsilon$ unendlich klein und N unendlich groß. Dann folgt

$$\cos(N\varepsilon) \pm i \sin(N\varepsilon) = (\cos \varepsilon \pm i \sin \varepsilon)^N.$$

Addition und Subtraktion liefert dann

$$\cos(N\varepsilon) = \frac{1}{2} ((\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N + (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N)$$

und

$$\sin(N\varepsilon) = \frac{1}{2i} ((\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N - (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N).$$

Euler benutzt nun wieder den binomischen Lehrsatz und erhält

$$\cos(N\varepsilon) = \cos^N \varepsilon - \frac{N(N-1)}{2!} \cos^{N-2} \varepsilon \sin^2 \varepsilon + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!} \cos^{N-4} \varepsilon \sin^4 \varepsilon + \dots \quad (25)$$

und

$$\begin{aligned} \sin(N\varepsilon) &= N \cos^{N-1} \varepsilon \sin \varepsilon - \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \cos^{N-3} \varepsilon \sin^3 \varepsilon \\ &+ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{5!} \cos^{N-5} \varepsilon \sin^5 \varepsilon + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Schreiben wir nun $N\varepsilon = x$ und ersetzen $\cos \varepsilon = 1$ und $\sin \varepsilon = \varepsilon$ sowie Quotienten wie $\frac{N-1}{N} = 1$, so erhalten wir schließlich die Reihen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp$$

und

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp$$

wie sie Newton angegeben hatte. Es bleibt zunächst unklar, warum Euler $\sin \varepsilon = \varepsilon$ setzt. Diese infinitesimale Beziehung liest Euler aus Abbildung 38 ab.

Die Beziehung zur Exponentialfunktion folgt nun wie folgt. Setzt man in (25)–(26) $\varepsilon = x/N$, so folgen wegen $\cos \varepsilon = 1$ und $\sin \varepsilon = \varepsilon = x/N$ die Beziehungen

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{ix}{N} \right)^N + \left(1 - \frac{ix}{N} \right)^N \right)$$

und

$$\sin x = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{ix}{N} \right)^N - \left(1 - \frac{ix}{N} \right)^N \right)$$

und somit gemäß (22)

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

und

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

und schließlich durch Addition auch die berühmte *Eulersche Identität*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x . \quad (27)$$

In der ein oder anderen Form modifiziert ist dies die bis heute übliche Art, die trigonometrischen Funktionen einzuführen.

5.3 Ableitungsregeln

Euler entwickelt die Ableitungsregeln in der uns bekannten Form. Er leitet diese her, indem er Infinitesimalterme höherer Ordnung einfach weglässt. So erhält er also z. B. für $y = x^n$ mit dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} dy &= (x + dx)^n - x^n = (x^n + n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} dx^2 + \dots) - x^n \\ &= n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} dx^2 + \dots , \end{aligned}$$

also

$$dy = n x^{n-1} dx .$$

Die *Produktregel* erhält er in der üblichen Form

$$d(pq) = (p + dp)(q + dq) - pq = p dq + q dp + dp dq = p dq + q dp .$$

Um die Quotientenregel zu bekommen, entwickelt Euler mit der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{q + dq} = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{dq}{q} + \frac{dq^2}{q^2} \mp \right) = \frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}$$

und erhält dann

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p + dp}{q + dq} - \frac{p}{q} = (p + dp) \left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}\right) - \frac{p}{q} \\ &= \frac{dp}{q} - \frac{p dq}{q^2} - \frac{dp dq}{q^2} = \frac{q dp - p dq}{q^2}. \end{aligned}$$

Um die Logarithmusfunktion zu differenzieren, schreibt Euler unter Verwendung der Logarithmengesetze

$$d(\ln x) = \ln(x + dx) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} \pm \dots = \frac{dx}{x}.$$

Mit der Exponentialreihe und dem Additionstheorem der Exponentialfunktion erhält er die Ableitung der Exponentialfunktion:

$$d(e^x) = e^{x+dx} - e^x = e^x (e^{dx} - 1) = e^x \left(1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \dots - dx\right) = e^x dx.$$

Ähnlich leitet er auch die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen her:

$$d(\sin x) = \cos x dx \quad \text{und} \quad d(\cos x) = -\sin x dx.$$

5.4 Weitere Highlights Eulers

Wie wir gesehen haben, wurde Newtons Binomialreihe prominent von Euler bei seiner Einführung der Exponentialfunktion, der Logarithmusfunktion und der trigonometrischen Funktionen verwendet. Aber Newton hatte keinen Beweis für die Gültigkeit der Binomialreihe gefunden, und auch nach ihm blieb dieser Satz lange unbewiesen. Selbst Euler gibt in seiner *Introductio* keinen Beweis, er hat ihn noch nicht. Dennoch war Euler später (1774) der erste, der eine noch unvollständige Beweisidee für diesen Satz gab.

Wie würden wir den Beweis heute führen? Wie kann man beweisen, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Beziehung (14)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

gilt? Ein Beweis geht wie folgt: Man leitet für $f(x) := (1+x)^\alpha$ durch Differentiation die Differentialgleichung

$$(1+x) f'(x) - \alpha f(x) = 0$$

her. Setzt man in diese Gleichung den Ansatz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ein, so folgt durch Koeffizientenvergleich

$$(1+k) a_{k+1} = (\alpha - k) a_k.$$

Diese Rekursionsgleichung ist aber einfach zu lösen. Wegen $a_0 = f(0) = 1$ folgt hieraus sofort (z. B. durch Induktion)

$$a_k = \binom{\alpha}{k}.$$

Diese Schritte können automatisiert werden und sind in Computeralgebrasystemen implementiert (Vorführung *Mathematica*).

Nun kommen wir zu einem weiteren mutigen Schritt Eulers: dem Sinusprodukt, einer Darstellung der Sinusfunktion mittels ihrer Nullstellen [3]. Er stellt zunächst fest, dass jedes Polynom $f(z)$ mit reellen Koeffizienten mit einem linearen Faktor

$$z - r e^{i\varphi}$$

auch den Faktor

$$z - r e^{-i\varphi}$$

enthält. Dies folgt sofort aus der Gleichung

$$0 = f(r e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^n a_k r^k e^{i k \varphi} = \sum_{k=0}^n a_k r^k \cos(k \varphi) + i \sum_{k=0}^n a_k r^k \sin(k \varphi) .$$

Beide Summen sind 0, somit ist auch $f(r e^{-i\varphi}) = 0$.

Da $f(z)$ also zwei lineare Faktoren enthält, enthält $f(z)$ somit den quadratischen Faktor

$$(z - r e^{i\varphi})(z - r e^{-i\varphi}) = z^2 - r z (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + r^2 e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = z^2 - 2 r z \cos \varphi + r^2 .$$

Euler bestimmt nun die quadratischen Faktoren des speziellen Polynoms

$$f(z) = a^n - z^n . \quad (28)$$

Euler weiß durch Einsetzen von $z = r e^{i\varphi}$ in $f(z)$, „dass dies ein Faktor von $f(z)$ ist, sobald für r die Unbekannten $r \neq 0$ und φ aus den Gleichungen

$$0 = a^n - r^n \cos(n \varphi) \quad \text{und} \quad 0 = r^n \sin(n \varphi)$$

bestimmt sind. Aus $\sin(n \varphi) = 0$ folgt aber entweder $n \varphi = (2k + 1) \pi$ oder $n \varphi = 2k \pi$. Wir müssen letzteren Wert nehmen, so dass $\cos(n \varphi) = +1$ ist, folglich also $0 = a^n - r^n$ oder $r = a$.“ Wir haben also die Parameter durch $p = a$ und $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ bestimmt. Unser quadratischer Faktor hat somit die Form

$$a^2 - 2 a z \cos \frac{2k\pi}{n} + z^2 . \quad (29)$$

Euler zählt nun nach und stellt fest, dass bei Einsetzen von $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sich somit „alle“ Faktoren ergeben, da sich ihr Gesamtgrad zu n summiert.

Euler nutzt dieses Wissen nun für die Exponentialfunktion. Er schreibt wieder

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{x}{N}\right)^N$$

und wendet nun Formel (29) an. Er setzt also in (28)

$$a = 1 + \frac{x}{N} , \quad z = 1 - \frac{x}{N} , \quad \text{und} \quad n = N$$

ein und erhält für einen beliebigen quadratischen Faktor von $e^x - e^{-x}$

$$\begin{aligned} a^2 - 2 a z \cos \frac{2k\pi}{n} + z^2 &= \left(1 + \frac{x}{N}\right)^2 - 2 \left(1 + \frac{x}{N}\right) \left(1 - \frac{x}{N}\right) \cos \frac{2k\pi}{N} + \left(1 - \frac{x}{N}\right)^2 \\ &= 2 + 2 \frac{x^2}{N^2} - 2 \left(1 - \frac{x^2}{N^2}\right) \cos \frac{2k\pi}{N} . \end{aligned}$$

Euler setzt nun

$$\cos \frac{2k\pi}{N} = 1 - \frac{2k^2\pi^2}{N^2}$$

(woher kommt dies?) und erhält durch Multiplikation mit $\frac{N^2}{4k^2\pi^2}$ den Faktor

$$1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{N^2}.$$

Euler argumentiert nun: „Hierin aber kann man sicher den Teil $\frac{x^2}{N^2}$ weglassen, weil derselbe auch mit N multipliziert immer noch unendlich klein bleibt. Setzt man überdies $k = 0$, so erhält man wie vorher gleich x .“ Er hatte vorher die Fallunterscheidung für einen linearen Faktor durchgeführt. Euler schließt nun, dass alle berechneten Faktoren für $k = 0, 1, \dots$ Teiler sind und folglich (!)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdots \quad (30)$$

Die Normierung (Multiplikation mit $1/2$ auf linken Seite) entnimmt er der Reihendarstellung

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

Er hat also mittels (30) die Funktion $\sinh x$ in ein unendliches Produkt verwandelt!

Nun ist es nicht mehr weit zum Sinusprodukt. Setzt man nämlich in obigem Produkt (30) $x = iz$ ein, so erhält man nun

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right) \cdots \quad (31)$$

oder, „indem man jeden Faktor in zwei zerlegt“

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{3\pi}\right) \cdots.$$

Während das letzte Produkt leider nicht konvergiert – Konvergenz war für Newton und Euler zwar relevant, wenn es um die konkrete Berechnung von Approximationen ging, wurde aber erst wesentlich später mathematisch fundiert –, ist das Sinusprodukt in der Form (31) heute in jedem Funktionentheoriebuch zu finden! Euler beschließt seine Argumentation mit der Aussage „So oft daher der Bogen z so beschaffen ist, dass irgendeiner dieser Faktoren verschwindet, was geschieht, wenn $z = 0, z = \pm\pi, z = \pm2\pi$, und allgemein, wenn $z = \pm k\pi$ ist, wo k jede ganze Zahl bedeutet, so wird auch zugleich der Sinus dieses Bogens gleich 0 sein, eine bekannte Tatsache, auf deren Grund man auch umgekehrt jene Faktoren hätte finden können.“

Ebenso erhält Euler die Formel

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4z^2}{49\pi^2}\right) \cdots.$$

Euler war davon überzeugt, dass ein Polynom n -ten Grades genau n komplexe Nullstellen hat, die einer Produktdarstellung entsprechen. Genauso ging er davon aus, dass eine Potenzreihe unendlich viele Nullstellen generiert, die wiederum eine Produktdarstellung liefern. Eulers Argumentation für (30) und damit für (31) beruht auf der Annahme, man könne mit Potenzreihen ganz genau so rechnen wie mit Polynomen, Potenzreihen sind für Euler nichts anderes als unendlich lange Polynome. In der Funktionentheorie wird gezeigt, dass dieser Standpunkt im allgemeinen *falsch* ist! Man kann zwar jede ganze Funktion – welche also in der ganzen komplexen Ebene analytisch

ist bzw. als Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius gegeben ist – durch ihre Nullstellen darstellen, aber im allgemeinen enthält diese Darstellung als Produkt einen konvergenzerzeugenden Faktor. Dies ist die Aussage des *Weierstraßschen Produktsatzes*. Euler hatte Glück und das Gespür, dass die trigonometrischen Funktionen besonders gutartige Zeitgenossen sind. Außerdem hat er natürlich all seine Resultate numerisch überprüft. Beispiele hierfür werden wir bald betrachten. Man beachte, dass das Sinusprodukt für $x = \frac{\pi}{2}$ das Wallissche Produkt als Spezialfall enthält (Übungsaufgabe).

Was macht nun Euler mit seiner Produktdarstellung? Er wendet sie an und löst damit 1735 das sogenannte *Basler Problem*, welches 1644 Pietro Mengoli zuerst aufgestellt hatte und eines der Lieblingsprobleme der Brüder Bernoulli war, welche aber keine Lösung finden konnten. Das Basler Problem besteht in der Aufgabe, eine geschlossene Formel zu finden für die Summe der reziproken Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx 1,64493\dots$$

Mit dem hyperbolischen Sinusprodukt konnte Euler den Wert dieser Summe angeben und er fand noch eine Vielzahl weiterer interessanter Summenformeln.

Die Resultatfamilie, die Euler in Kapitel 10 seiner *Introductio* [3] präsentiert, kann heute im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

so formuliert werden: Euler bestimmt die Werte der Zetafunktion an den positiven geradzahlgigen Stellen. Für die Basler Summe erhält er beispielsweise

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wie geht Euler hierzu vor? Er vergleicht eine Potenzreihe

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k$$

mit ihrer Produktdarstellung

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j z) = (1 + \alpha_1 z)(1 + \alpha_2 z)(1 + \alpha_3 z) \cdots$$

Durch Ausmultiplizieren des Produktes erhält er ganz allgemein für die Koeffizienten der Potenzreihe

$$A_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j, \quad A_2 = \sum_{j < k}^{\infty} \alpha_j \alpha_k, \quad A_3 = \sum_{j < k < l}^{\infty} \alpha_j \alpha_k \alpha_l$$

usw., s. Abbildung 39.

Aus diesen Größen gewinnt Euler nun die Summe der α_j , die Summe ihrer Quadrate, ihrer Kuben und der weiteren Potenzen. Ich führe dies am Beispiel des Baseler Problems vor.

Wir schreiben

$$S_m := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^m.$$

§ 165.

Wenn

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots = (1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z) \dots$$

ist, so müssen diese Factoren, mag deren Anzahl eine endliche oder unendliche sein, eben jenen Ausdruck $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots$ wieder hervorbringen, wenn man sie wirklich mit einander multiplicirt. Es muss daher, wie aus der gemeinen Algebra bekannt ist, der Coefficient

- A** gleich der Summe aller Grössen α, β, \dots also gleich $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \dots$
- B** gleich der Summe der Producte aus je zweien also gleich $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \dots$,
- C** gleich der Summe der Producte aus je dreien also gleich $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \dots$,
- D** gleich der Summe der Producte aus je vieren,
- E** gleich der Summe der Producte aus je fünf von diesen Grössen u. s. w. sein.

Abbildung 39: Euler stellt in § 165 der Introductio eine Potenzreihe ihrem Produkt gegenüber

Zunächst erhält man für S_1 die Beziehung $S_1 = A_1$. Dies wird bereits das Baseler Problem lösen! Die Größe S_2 erhalten wir mit Hilfe der Rechnung

$$A_1^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right) = \left(\sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_j \alpha_k \right) = 2 \left(\sum_{j < k}^{\infty} \alpha_j \alpha_k \right) + S_2 ,$$

also

$$S_2 = A_1^2 - 2 A_2 . \tag{32}$$

Ähnliche Beziehungen findet Euler für S_3, S_4, \dots . Wir wenden nun obige Beziehungen auf das hyperbolische Sinusprodukt in folgender Form an:

$$\frac{\sinh x}{x} = \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2} \right) \dots$$

Die Potenzreihe hat die Koeffizienten

$$\frac{\sinh x}{x} = 1 + \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{120} x^4 + \dots$$

Euler benutzt nun die Variable $z = \frac{x^2}{\pi^2}$ und erhält somit

$$1 + \frac{\pi^2}{6} z + \frac{\pi^4}{120} z^2 + \dots = (1 + z) \left(1 + \frac{z}{4} \right) \left(1 + \frac{z}{9} \right) \left(1 + \frac{z}{16} \right) \dots$$

also $A_1 = \frac{\pi^2}{6}$, $A_2 = \frac{\pi^4}{120}$ für $\alpha_j = \frac{1}{j^2}$, so dass wir insbesondere die beiden Gleichungen

$$S_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots &= \frac{2^0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1} \pi^2 \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots &= \frac{2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3} \pi^4 \\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \dots &= \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 7} \cdot \frac{1}{3} \pi^6 \\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \dots &= \frac{2^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 9} \cdot \frac{3}{5} \pi^8 \\
1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \dots &= \frac{2^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 11} \cdot \frac{5}{3} \pi^{10} \\
1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \dots &= \frac{2^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 13} \cdot \frac{691}{105} \pi^{12} \\
1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \dots &= \frac{2^{12}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 15} \cdot \frac{35}{1} \pi^{14} \\
1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \dots &= \frac{2^{14}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 17} \cdot \frac{3617}{15} \pi^{16} \\
1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \dots &= \frac{2^{16}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 19} \cdot \frac{43867}{21} \pi^{18} \\
1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \dots &= \frac{2^{18}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 21} \cdot \frac{1222277}{55} \pi^{20} \\
1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \dots &= \frac{2^{20}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 23} \cdot \frac{854513}{3} \pi^{22} \\
1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \dots &= \frac{2^{22}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 25} \cdot \frac{1181820455}{273} \pi^{24} \\
1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \dots &= \frac{2^{24}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 27} \cdot \frac{76977927}{1} \pi^{26}
\end{aligned}$$

Abbildung 40: Eulers Formeln der Werte der Zetafunktion

sowie

$$S_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = A_1^2 - 2 A_2 = \frac{\pi^4}{36} - 2 \frac{\pi^4}{120} = \frac{\pi^4}{90}$$

erhalten. In Abbildung 40 findet sich Eulers vollständige Liste. Euler hält fest, dass $\zeta(2n)$ ein rationales Vielfaches von π^{2n} ist. Die Bestimmung der Werte der Zetafunktion an ungeraden Stellen ist bis heute nicht geglückt. Man weiß, dass $\zeta(3)$ irrational ist. Dass $\zeta(2n+1)$ ein rationales Vielfaches von π^{2n+1} ist, ist sehr unwahrscheinlich.

5.5 Taylorreihen

Euler verwendet Potenzreihen mit schlafwandlerischer Sicherheit, indem er mit ihnen einfach algebraisch rechnet, aber der Zusammenhang von Potenzreihen mit der iterativen Differentiation, wie er in der Taylorreihe zur Geltung kommt, wurde von ihm nicht betrachtet.

Diese Entwicklungen wurden von MacLaurin und Taylor in Großbritannien, aber beispielsweise auch von Lagrange auf dem Festland betrachtet. Wir sehen uns Lagranges Methode etwas genauer an. Wird x durch $x + i$ ersetzt, so erhält man „nach der Theorie der Reihen“ gemäß Lagrange

$$f(x + i) = f(x) + p(x)i + q(x)i^2 + r(x)i^3 + \dots,$$

wobei die Koeffizienten neue Funktionen der Variablen x sind, welche von der Originalfunktion $f(x)$ „abgeleitet“ werden können. Hier rührt also der Begriff der „Ableitung“ her! Lagrange schreibt einige derartige Reihen *ad hoc* hin.¹⁵ Im Sinne der heutigen Nomenklatur spricht Lagrange also von *analytischen* Funktionen, ohne diese allerdings genau charakterisieren zu können. Zur damaligen Zeit war dies eben der betrachtete Funktionentypus.

Für die erste abgeleitete Funktion $p(x)$ führt Lagrange die Schreibweise $p(x) = f'(x)$ ein und nennt diese Funktion die (*erste*) *Ableitung* von $f(x)$. Lagrange ersetzt nun i durch $i + o$ und erhält zunächst für unendlich kleines o

$$\begin{aligned} f(x + i + o) &= f(x) + p(x)(i + o) + q(x)(i + o)^2 + r(x)(i + o)^3 + \dots \\ &= f(x) + (p(x)i + q(x)i^2 + r(x)i^3 + \dots) \\ &\quad + (p(x)o + 2q(x)io + 3r(x)i^2o + \dots). \end{aligned} \tag{33}$$

Dann ersetzt Lagrange in einer zweiten Rechnung x durch $x + o$ und erhält auf der anderen Seite

$$\begin{aligned} f(x + i + o) &= f(x + o) + p(x + o)i + q(x + o)i^2 + r(x + o)i^3 + \dots \\ &= (f(x) + f'(x)o + \dots) + (p(x) + p'(x)o + \dots)i \\ &\quad + (q(x) + q'(x)o + \dots)i^2 + (r(x) + r'(x)o + \dots)i^3 + \dots. \end{aligned} \tag{34}$$

Vergleicht man nun (33) mit (34), so erhält man iterativ neben $p(x) = f'(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2}p'(x) = \frac{1}{2}f''(x) \\ r(x) &= \frac{1}{3}q'(x) = \frac{1}{3!}f'''(x) \\ &\vdots = \vdots, \end{aligned}$$

wobei $f''(x)$ die Ableitung von $f'(x)$ bedeutet usw. Also erhalten wir die Taylorsche Reihe

$$f(x + i) = f(x) + f'(x)i + \frac{1}{2}f''(x)i^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)i^3 + \dots.$$

Am Ende bemerkt Lagrange durch termweise Differentiation, dass die sukzessiven abgeleiteten Funktionen durch sukzessive Differentiation entstehen (vollständige Induktion = Übungsaufgabe). Lagrange gab auch den nach ihm benannten *Restterm* an.

6 Analysis im Zeitalter von Cauchy, Riemann und Weierstraß

Grenzwertkonzepte haben bisher gefehlt. Daher konnte auch der Begriff der *Stetigkeit* noch nicht formuliert werden. In diesem Kapitel werden wir die modernen Techniken wie den ϵ - δ -Kalkül etc. nur noch stichpunktartig auflisten. Den meisten Mathematikern wie Newton, Leibniz, Bernoulli oder Euler, die die Infinitesimalrechnung zur Blüte brachten, kam das Arbeiten mit unendlich großen und unendlich kleinen Größen zwar sehr gelegen, denn diese Größen ermöglichten die ungeheuren Erkenntnisse, aber auch etwas unheimlich.

¹⁵Welche könnten Sie *ad hoc* hinschreiben?

- Jean d’Alembert (1717–1783) schrieb die Ableitung als Grenzwert

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

anstatt durch Fluxionen oder durch Differentiale, ohne aber genauer zu spezifizieren, was ein Grenzwert sei.

- 1748 betrachtete d’Alembert die Bewegung einer schwingenden Saite, die an den Stellen $x = 0$ und $x = L$ fest verankert ist unter Benutzung einer Variante der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

wobei $y(x, t)$ die Auslenkung am Ort x zum Zeitpunkt t sei. Er stellte fest, dass jede Funktion der Form

$$y(x, t) = \phi(x + at) + \psi(x - at)$$

obige Gleichung löst, sofern ϕ und ψ beliebige Funktionen (einer Variablen) sind.

Ist nun die Saite zu Beginn durch eine beliebige Funktion

$$y(x, 0) = f(x)$$

mit $f(0) = f(L) = 0$ gegeben, so folgt die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$y(x, t) = \frac{1}{2}f(x + at) + \frac{1}{2}f(x - at).$$

Es gab nun einen erheblichen Disput darüber, „wie beliebig“ die Ausgangslage $f(x)$ sein kann. Ist nun aber z. B.

$$f(x) = y(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x}{L} & \text{falls } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2(L-x)}{L} & \text{falls } \frac{L}{2} < x < L \end{cases},$$

so ist diese Funktion nicht durch einen Ausdruck gegeben und in heutiger Sprache an der Stelle $x = \frac{L}{2}$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Aber natürlich sieht eine angespannte Saite zu Beginn gerade eben so aus, so dass auch solche Funktionen zulässig sein müssen, wie Euler forderte. Das Wort „stetig“ wurde damals noch in dem Sinn einer analytischen Formel gebraucht. Davon musste man sich verabschieden.



Abbildung 41: d’Alembert und Fourier

- Joseph Fourier (1768–1830) betrachtete die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (35)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad (36)$$

sowie

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (37)$$

wobei $u(x, y)$ die Temperaturverteilung in einer zweidimensionalen Region darstellt. Er stellte fest, dass für ganzzahliges $n \in \mathbb{Z}$ jede der Funktionen

$$e^{-ny} \sin(nx)$$

die Gleichungen (35)–(36) erfüllt. Da die partielle Differentialgleichung linear ist, ist folglich auch jede Linearkombination

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin(nx)$$

eine Lösung (Superposition). Wählt man nun $\phi(x)$ gemäß

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (x \in (0, \pi)),$$

so ist auch die letzte Gleichung (37) erfüllt. Fourier leitete dann die Formel

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(x) \sin(nx) \, dx$$

für die Koeffizienten b_n her. Es ergaben sich also *Fourierreihen* (trigonometrische Reihen dieser Art wurden auch bereits von Euler betrachtet), und die Tatsache, dass sich offenbar auch unstetige Funktionen als Fourierreihen schreiben ließen, gab Anlass zu Diskussionen. Die heutige Theorie der Fourierreihen ist – im Vergleich zu Potenzreihen – ziemlich kompliziert.

- Bernard Bolzano (1781–1848)¹⁶ war der erste, der die Stetigkeit einer Funktion in präziser Weise formulierte und damit einen Beweis des *Zwischenwertsatzes* gab. Er benutzte zwar noch nicht die griechischen Buchstaben ϵ und δ , aber dennoch entspricht seine Definition unserer heutigen:

Ist x ein Element eines Intervalls (im Definitionsbereich von f), dann kann die Differenz $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner gemacht werden als jede Größe, wenn man ω so klein wählt, wie man möchte.

Mit anderen Worten: f ist stetig in einem Intervall I , wenn

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f(x + \omega) = f(x)$$

ist für alle $x \in I$.

Bolzano benutzte bereits das *Cauchy Kriterium*, aber es fehlte ihm die Vollständigkeit von \mathbb{R} .

¹⁶ein Hobbymathematiker (!) und Priester



Abbildung 42: Bolzano und Cauchy

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) war die dominante Figur in einem Paris, das sich als das Zentrum der mathematischen Welt betrachtete, obwohl Gauß Deutschland nie verließ. Cauchy und Gauß haben der Analysis die noch fehlende Rigorosität gegeben, aber während Gauß nur wenig publizierte („wenig, aber reif“), publizierte Cauchy sehr eifrig. Es wird Cauchy allerdings nachgesagt, dass er durchaus Begriffe wie Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit durcheinanderbrachte.¹⁷

Trotzdem ist es Cauchys Verdienst, die Analysis und die komplexe Analysis (Funktionentheorie) auf den heutigen Stand gehoben zu haben. Heute noch sprechen wir vom *Cauchyschen Integralsatz*, von der *Cauchyschen Integralformel*, vom *Cauchyschen Konvergenzkriterium* und eben von einer *Cauchyfolge*.

Cauchy gibt einen weiteren Beweis für die Binomialreihe, der aber immer noch unvollständig war. Den ersten vollständigen Beweis für die Binomialreihe gab Niels Henrik Abel 1826.



Abbildung 43: Abel und Riemann

- Während die Integration durch die Überlegungen der Älteren bisher immer als Antidifferentiation aufgefasst wurde,¹⁸ stellte Bernhard Riemann (1826–1866), der 1859 Gauß' Nachfolger an der Universität Göttingen wurde, die Integration auf eigene Beine. Der *Riemannsche Integralbegriff* ist uns heute allen geläufig. Riemann ist auch berühmt für seine *Riemannsche Vermutung* über die Nullstellen der ζ -Funktion, welche bis heute unbewiesen ist.

¹⁷Dies ist nur eine Veränderung der Reihenfolge der auftretenden Quantoren.

¹⁸Im Englischen heißt die Stammfunktion *antiderivative*.

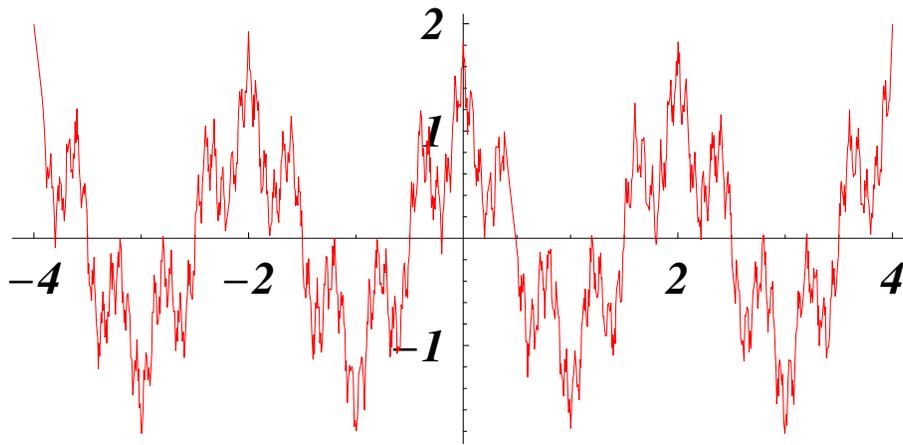


Abbildung 44: Die Weierstraß-Funktion

- Karl Weierstraß (Gymnasiallehrer, 1815-1897) gab als erster ein Beispiel einer Funktion, welche in einem ganzen Intervall stetig, aber nirgends differenzierbar ist, s. Abbildung 44. Bis dahin war die allgemeine Ansicht, dies könne nur an einzelnen isolierten Stellen auftreten. Die Funktion hat die einfache Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

wobei a eine ungerade ganze Zahl und $b \in (0, 1)$ ist mit $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Dies machte es nötig, sich das System der reellen Zahlen genauer anzusehen und führte zur Entdeckung der Vollständigkeit und zur Konstruktion der reellen Zahlen durch Karl Weierstraß, Georg Cantor, Richard Dedekind und andere.



Abbildung 45: Weierstraß, Cantor und Dedekind

- Die *Nonstandard-Analysis* von Abraham Robinson (1966) gab im Nachhinein Eulers unendlich kleinen und unendlich großen Größen doch ihre volle Rechtfertigung! Robinson erklären den Körper der *hyperreellen Zahlen* \mathcal{R} , welcher \mathbb{R} enthält und welcher eben auch unendlich kleine und unendlich große Größen enthält. Führt man in diesem Körper auf geschickte Weise Äquivalenzklassen ein, so dass jede Äquivalenzklasse genau eine reelle Zahl enthält, so liefert dies genau Eulers Berechnungen. Auf diese Weise schließt sich der Kreis.

7 Abschließende Bemerkungen

Die meisten Bilder dieser Ausarbeitung sind aus der wunderbaren Online-Enzyklopädie Wikipedia [8], wo man auch vielfältige weitere Informationen über die besprochenen Mathematiker und die zugehörige Mathematik finden kann. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Ausarbeitung nicht zur Veröffentlichung gedacht ist und keine Copyrightgarantien bestehen.

Literatur

- [1] Barner, K.: How old did Fermat become? In: Das Leben Fermats, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Heft 3, 9 (2001), Berlin, 209–228
- [2] Edwards, C. H. Jr.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer, New York, 1979.
- [3] Euler, L.: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, Reprint 1983.
- [4] Gaulke, K.: *Der Ptolemäus von Kassel. Landgraf Wilhelm IV. von Hessen-Kassel und die Astronomie*. Kataloge der Museumslandschaft Hessen Kassel Bd. 35, Gutenberg Riemann GmbH, Kassel, 2007, ISBN 978-3-931787-43-1
- [5] Jahnke, H. N. (Hg): *Geschichte der Analysis*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999.
- [6] Lutsdorf, H. Th.: *Die Logarithmentafeln Jost Bürgis. Bemerkungen zur Stellenwert- und Basisfrage*. Schriftenreihe A der ETH-Bibliothek, Zürich, 2005, ISBN 3-9521386-7-3
- [7] Struik, D. J.: *Abriss der Geschichte der Mathematik*. Vieweg, Braunschweig, 4. Auflage, 1967.
- [8] Wikipedia: Online-Enzyklopädie (www.wikipedia.de)