

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2013

Aufgaben 3a) und 4) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Gegeben seien die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} :

$$A = \{-1, 1, 8, \sqrt{7}, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 4, \sqrt{7}, 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{7}\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\sqrt{7}\}.$$

- Man bestimme $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$ und $A \cap B \cap C$. (Hinweis: Die entsprechenden Definitionen finden Sie in Abschnitt I.2.)
- Man entscheide, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind: $A \subset B$, $A \supset B$, $A \subset D$, $A \supset D$ und $A = D$. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihre Entscheidung!

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgenden Mengen:

$$X = \{x \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 20a + 12b\},$$

$$Y = \{x \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 7a + 3b\}.$$

Man beweise oder widerlege:

- $X = \mathbb{Z}$.
- $Y = \mathbb{Z}$.
- $X \subset G$, wobei $G := \{x \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt } u \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 2u\}$ die Menge der geraden Zahlen ist.
- $G \subset X$.

(Hinweis: Vgl. Axiom (F1) und Beispiel 2 in Abschnitt I.2. für die Grundstruktur eines Beweises der Gleichheit zweier Mengen.)

Aufgabe 3. Wir betrachten die Menge $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Ferner sei $\Gamma := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann ist K ein Kreis und Γ ein Gitter in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Fertigen Sie eine geeignete Skizze an!

- a) Ergänzen Sie zu einer wahren Aussage und geben Sie dann einen stichhaltigen formalen Beweis für diese Aussage. (Hinweis: Vgl. Axiom (F1) und Beispiel 2 in Abschnitt I.2. für die Grundstruktur eines Beweises der Gleichheit zweier Mengen.)

$$\Gamma \cap K = \{(,), (,), (,), (,)\}.$$

- b) Geben Sie mindestens fünf Elemente von $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap K$ an. (Das Konstruieren des fünften Elementes ist nicht ganz einfach. Lassen Sie sich etwas einfallen!)

Aufgabe 4. Geben Sie die folgenden Mengen explizit (z.B. durch Auflisten ihrer Elemente) an: $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{1\})$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$. Achten Sie dabei unbedingt auf das formal korrekte setzen der Mengenklammern.

Abgabe: Die Lösungen müssen spätestens am Mittwoch den 08.05.2013 um 08:15 Uhr in den Kasten vor Raum 2303 eingeworfen werden.