Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2013

Aufgaben 1a) und 3b) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist $3^n - 3$ durch 6 teilbar.

b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. (Hier steht $\sum_{k=1}^{n} k$ für $1+2+3+\cdots+n$.)

Aufgabe 2. Prüfen Sie den folgenden Beweis auf Richtigkeit und geben Sie ggfls. an, was falsch gemacht wurde. (Kritisieren Sie aber bitte nicht zu viel.)

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2n + 1 \leq 2^n$.
Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Aussage richtig.
Induktionsschritt: Wir dürfen annehmen, daß $2n + 1 \leq 2^n$ $(*)$ gilt. Wir müssen (unter dieser Annahme) zeigen, daß $2(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$ gilt. Aus der Annahme $(*)$ folgt leicht, daß $2n+3 \leq 2^n+2$ gilt. Außerdem gilt $2^n + 2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Also folgt

$$2n + 3 \leq 2^n + 2 \leq 2^{n+1}$$

wie gewünscht.

Aufgabe 3. Zur Erinnerung: Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man $n!$ rekursiv durch $0! := 1$ und $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$. Dann gilt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$. Ferner wurde der Binomialkoeffizient definiert durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } k \in \{0, \cdots, n\}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Beweisen Sie anhand dieser Definitionen:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Bitte wenden

Aufgabe 4. Entscheiden Sie von den folgenden Abbildungen jeweils, ob sie injektiv bzw. surjektiv sind. Begründen Sie alle Aussagen, die Sie treffen!

a) $f_1 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2\}$ definiert durch

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	2	1	1	0.

b) $f_2 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definiert durch

x	0	1	2	3
$f_2(x)$	0	1	4	2.

c) $f_3 : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},\ x \mapsto x^4.$

d) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^4.$

Zusatzaufgabe. (Paradoxon von Russel) Beweisen Sie, dass der Zusammenschluß $\mathcal{A}$ aller Mengen keine Menge sein kann. *Anleitung:* Treffen Sie die Widerspruchsannahme, $\mathcal{A}$ wäre doch eine Menge. Folgern Sie mit Hilfe der Axiome aus der Vorlesung, dass dann auch

$$\mathcal{A}^+ := \{M \in \mathcal{A} : M \notin M\}$$

eine Menge wäre. Führen Sie nun einen geeigneten Widerspruch herbei. *Hinweis dazu:* Gilt $\mathcal{A}^+ \in \mathcal{A}^+$ oder nicht?

Allgemeiner Hinweis: Grundsätzlich sollen Sie im Übungsbetrieb alle Aussagen begründen, sofern nicht explizit etwas anderes gesagt wird. Bei Rechenaufgaben ist der vollständige Rechenweg als Begründung mit anzugeben.

Abgabe: Die Lösungen müssen spätestens am Mittwoch den 15.05.2012 um 08:15 Uhr abgegeben werden.