

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2013

Aufgaben 1) und 4) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Es wird mit einem Würfel zwei mal nacheinander gewürfelt. Ergebnisraum ist die Menge $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$. Sei P die Gleichverteilung auf Ω . Wir betrachten für $s \in \mathbb{N}$ das Ereignis “Produkt der Augenzahlen ist s ”

$$X_s := \{(i, j) \in \Omega : i \cdot j = s\}.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_s)$ in Abhängigkeit von s . (Wie immer: *Der Rechenweg muß in ausführlicher und verständlicher Weise dargelegt werden.*)

Aufgabe 2. An einer Schule werden insgesamt 1500 Schüler unterrichtet. Jeder hat an einem der¹ 365 Tage des Jahres Geburtstag. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an jedem Tag des Jahres mindestens ein Schüler der Schule Geburtstag hat. (Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, \dots, 1500\} \rightarrow \{1, \dots, 365\}$. Ihr Endergebnis darf Stirlingzahlen enthalten, die nicht explizit ausgerechnet werden müssen.)

Aufgabe 3. Es wird mit drei Würfeln gleichzeitig gewürfelt. Sei π die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach dem Wurf alle drei Würfel Augenzahl sechs zeigen (Sechser-Pasch). *Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende Berechnung von π korrekt ist oder nicht:*

Wir notieren das Ergebnis des Wurfes als (x_1, x_2, \dots, x_6) , wobei x_i die Anzahl der Würfel ist, die Augenzahl i zeigen. Ergebnisraum ist also $\Omega = \{x \in \mathbb{N}^6 : x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 3\}$. Offensichtlich sollte man hier mit der Gleichverteilung P auf Ω arbeiten. Es gilt $|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56$. Das uns interessierende Ereignis “Sechser-Pasch” ist $S = \{(0, 0, 0, 0, 0, 3)\}$. Also gilt

$$\pi = P(S) = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{1}{56}.$$

Aufgabe 4. Für $U \subset \mathbb{N}$ setzen wir $P(U) := \sum_{k \in U} \frac{1}{2^{k+1}}$. Beweisen Sie, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{N} ist. (Hinweis: Sie müssen für P die Eigenschaften (K1) und (K2) aus Abschnitt III.1 nachweisen. Beim Beweis von (K1) dürfen Sie Ihr Wissen über die geometrische Reihe (vgl. Analysis) anwenden.)

Aufgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch den 12.06.2013 bis 08:15 Uhr abgegeben werden.

¹Wir ignorieren den Effekt von Schaltjahren.