Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

Blatt 08
12.06.2013

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2013

Aufgaben 2) und 3) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Bei dem Spiel Kniffel wird mit fünf Würfeln gleichzeitig gewürfelt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, in *einem* solchen Wurf einen Kniffel (d.h. alle Würfel zeigen die gleiche Zahl) zu erzielen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, in *einem* solchen Wurf das Ergebnis "Full House" (d.h. drei Würfel zeigen eine Zahl und die anderen zwei Würfel eine andere Zahl) zu erhalten.

Hinweis: Denken Sie an Blatt 7, Aufgabe 3.

Aufgabe 2. (Das Monty-Hall-Problem) In einer amerikanischen Fernsehshow wird folgendes Spiel angeboten: Kandidat und Showmaster stehen auf einer Bühne. In der Rückwand sind drei Türen eingelassen. Hinter zwei der Türen steht eine Ziege und hinter einer Türe der Hauptgewinn. Der Kandidat wählt zunächst eine der Türen aus. Diese wird (etwa durch das Einschalten einer Lampe oberhalb der Türe) markiert aber nicht geöffnet. Der Showmaster, der die Position der Ziegen kennt, öffnet nun eine der nicht markierten Türen, hinter der eine Ziege steht. (Dies ist immer möglich.) Danach wird der Kandidat gefragt, ob er bei seiner ursprünglichen Wahl bleiben möchte, oder ob er zu der anderen noch verschlossenen Türe wechseln will. Seine jetzige Entscheidung zählt - ist der Hauptgewinn hinter der im 2. Versuch gewählten Türe, so bekommt er ihn; anderenfalls geht er leer aus. Es stellt sich die Frage wie sich der Kandidat verhalten sollte.

a) Nehmen wir an, der Kandidat legt von vorne herein fest, dass er im 2. Schritt bei seiner ursprünglichen Wahl bleibt. Was ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit bei dieser Strategie?

b) Nehmen wir an, der Kandidat legt von vorne herein fest, dass er im 2. Schritt die Türe wechselt. Was ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit bei dieser Strategie?

c) Sei $0 \leq \alpha \leq 1$. Der Kandidat könnte auch nach folgender Strategie $S(\alpha)$ spielen: Er wechselt in Schritt 2 die Türe mit Wahrscheinlichkeit α. ($S(0)$ ist die Strategie aus a). $S(1)$ ist die Strategie aus b). $S(\frac{1}{2})$ würde bedeuten, dass der Kandidat in Schritt 2 eine Münze wirft und genau dann wechselt, wenn Kopf kommt.) Berechnen Sie in Abhängigkeit von α die Gewinnwahrscheinlichkeit bei Strategie $S(\alpha)$.

Bemerkung: Randomisierte Strategien wie in c) kommen in der Spieltheorie häufig vor.

Aufgabe 3. Auf einer Prüfstation werden Bauteile getestet. Man weiß, daß 2% aller erzeugten Bauteile einen Fehler haben. Beim Prüfen wird bei 95% der defekten Teile der Fehler festgestellt, aber auch 1% der fehlerfreien Bauteile (fälschlicherweise) als defekt eingestuft. Zeichnen Sie einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsbaum und berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein nicht nicht als defekt eingestuftes Bauteil wirklich fehlerfrei ist.

Zur Erinnerung: Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \subset \Omega$. Die Familie (A, B, C) ist unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ und $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ gilt.

Aufgabe 4. Eine Münze wird drei mal geworfen. Wir betrachten den Ergebnisraum $\Omega := \{K, Z\}^3$ mit der Gleichverteilung P. Sei A das Ereignis, daß mindestens zwei mal Kopf kommt. Sei B das Ereignis, daß beim ersten Wurf Kopf kommt. Sei $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_2 = x_3\}$ das Ereignis, daß beim zweiten und dritten Wurf die gleiche Seite der Münze oben liegt.

a) Berechnen Sie $P(A \cap B \cap C)$ und $P(A)P(B)P(C)$.

b) Ist die Familie (A, B, C) von Ereignissen unabhängig? (Geben Sie eine klare Begründung für Ihre Aussage!)

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch den 19.06.2013 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.