

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2013

Aufgaben 1a) und 2) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Auf einer Ausstellung befinden sich 12 Gemälde. Zwei davon sind Fälschungen, 10 sind Originale. Ein Kunde taucht zusammen mit einem Experten auf, der bei Vorlage eines Gemäldes eine Einschätzung abgeben kann, ob es eine Fälschung ist oder nicht. Dieser Experte beurteilt ein ihm vorgelegtes Gemälde mit Wahrscheinlichkeit 0.9 richtig (unabhängig davon, ob man ihm ein Original oder eine Fälschung vorlegt).

- Der Kunde wählt zufällig ein Bild und befragt den Experten. Hält der Experte es für ein Original, so wird es von dem Kunden gekauft. Sonst wählt der Kunde zufällig ein anderes Bild und kauft dieses, ohne den Experten noch einmal zu befragen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Kunde mit einem Original nach Hause geht.
- Sei A das Ereignis, daß der Experte das im ersten Schritt gewählte Bild für eine Fälschung hält. Sei B das Ereignis, daß das im ersten Schritt gewählte Bild ein Original ist. Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(B|A)$.

Zur Erinnerung: Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \subset \Omega$. Die Familie (A, B, C) ist unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ und $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ gilt.

Aufgabe 2. Auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{8}$ und $P(5) = P(6) = \frac{1}{4}$. (Man kann sich das Würfeln mit einem *unfairen* Würfel vorstellen.) Sei $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{5, 6\}$, $C = \{3, 4, 5\}$. Untersuchen Sie (mit Begründung) die folgenden Familien auf Unabhängigkeit: (A, B) , (A, C) , (B, C) und (A, B, C) .

Aufgabe 3. Ein Versuch mit Ergebnisraum $\{0, 1\}$ und Trefferwahrscheinlichkeit p wird 20 mal unabhängig wiederholt. Sei $\Omega = \{0, 1\}^{20}$ der Ergebnisraum des gesamten Experiments und P das entsprechende Produktmaß auf Ω .

- Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 10 Treffer passieren?
- Sei A das Ereignis, dass ≥ 10 Treffer passieren und vor dem 10. Treffer genau 5 Nieten kommen. Berechnen Sie $P(A)$.

Die Endergebnisse werden von dem Parameter p abhängen. (Bemerkung: Vielleicht ist es hilfreich, zunächst den Fall $p = \frac{1}{2}$ durchzudenken; in diesem Fall ist P die Gleichverteilung.)

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch den 26.06.2013 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.