Skalarproduckt, Winkel, Vektoren

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL VERSITÄT

30. 10. 2013

Aufgabe 1

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllen folgende Bedingungen:

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -17,$$

das quadrat der Länge des Vektors $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ beträgt 7

wobei 2 die Länge des Vektors $\vec{a}$ sei (d. h. $||\vec{a}|| = 2$).
Berechnen Sie die Länge von $\vec{b}$, das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α (wiederum in Grad).

Aufgabe 1

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllen folgende Bedingungen:

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -17,$$

das quadrat der Länge des Vektors $\quad \vec{u} = \vec{a} - \vec{b} \quad$ beträgt $\quad 7$

wobei 2 die Länge des Vektors $\vec{a}$ sei (d. h. $||\vec{a}|| = 2$).
Berechnen Sie die Länge von $\vec{b}$, das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α (wiederum in Grad).

Aufgabe 1

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllen folgende Bedingungen:

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -17, \quad (1)$$

das quadrat der Länge des Vektors $\quad \vec{u} = \vec{a} - \vec{b} \quad$ beträgt $\quad 7 \quad (2)$

wobei 2 die Länge des Vektors $\vec{a}$ sei (d. h. $||\vec{a}|| = 2$).
Berechnen Sie die Länge von $\vec{b}$, das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α (wiederum in Grad).

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) &= -17 \Longleftrightarrow \\
\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b} &= -17 \Longleftrightarrow \\
||\vec{a}||^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2||\vec{b}||^2 &= -17 \Longleftrightarrow \\
-\vec{a}\cdot\vec{b}-2||\vec{b}||^2 &= -21 \qquad (1)
\end{aligned}$$

das quadrat der Länge des Vektors $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$ beträgt $7 \quad \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
||\vec{u}||^2 &= 7 \Longleftrightarrow \\
(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) &= 7 \Longleftrightarrow \\
\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} &= 7 \Longleftrightarrow \\
||\vec{a}||^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+||\vec{b}||^2 &= 7 \Longleftrightarrow \\
-2\vec{a}\cdot\vec{b}+||\vec{b}||^2 &= 3 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

(1) und (2) $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} -\vec{a}\cdot\vec{b} - 2||\vec{b}||^2 = -21 \\ -2\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 3 \quad \text{und} \quad ||\vec{b}|| = 3$$

$$\Longrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = \cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||||\vec{b}||} = \frac{3}{2.3} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^\circ\ .$$

Aufgabe 2

Man bestimme $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ einen Winkel von $\frac{5\pi}{6}$ einschließen.

Aufgabe 3

Man bestimme alle Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, die auf dem Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.