Vektorprodukt, Volumen, Gerade und Ebene

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL
VERSITÄT

13. 11. 2013

1 Vektorprodukt, Volumen

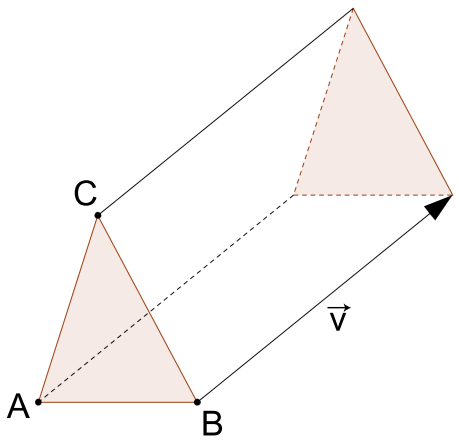
2 Gerade, Ebene

1 Vektorprodukt, Volumen

2 Gerade, Ebene

Aufgabe 1

Die drei Punkte $A = (1, 1, 2)$, $B = (-1, 1, -2)$, $C = (2, \lambda, 24)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf ($\lambda \in \mathbb{R}$). Verschiebt man dieses Dreieck durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 \\ 0 \\ 1 + \lambda \end{pmatrix}$, so überstreicht es ein Prisma im Raum.



(i) Wie groß ist das Volumen V dieses Prismas?

(ii) Bestimmen Sie λ so, dass $V = 0$ wird. Was bedeutet dies geometrisch für die Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ und $\vec{v}$?

Aufgabe 1

$A = (1, 1, 2)$, $B = (-1, 1, -2)$, $C = (2, \lambda, 24)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf ($\lambda \in \mathbb{R}$). Verschiebt man dieses Dreieck durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 \\ 0 \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$, so überstreicht es ein Prisma im Raum.

(i) Volumen des Prismas.

$$V = \frac{1}{2} \left| (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{v} \right|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\lambda - 1) \\ 40 \\ -2(\lambda - 1) \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 4(\lambda - 1) \\ 40 \\ -2(\lambda - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 \\ 0 \\ 1+\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

Aufgabe 1

(i)

$$\Longrightarrow V = \left| \frac{1}{2} \left(4(\lambda - 1)(1 - \lambda^2) - 2(\lambda - 1)(\lambda + 1) \right) \right| .$$

$$= |(\lambda - 1)(\lambda + 1)(-2\lambda + 1)| .$$

(ii) Bestimmen Sie λ so, dass $V = 0$ ist.

$$V = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = -1 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{1}{2} .$$

Geometrische Bedeutung von $V = 0$: Die Vektoren $\vec{AB}, \vec{AC}$ und $\vec{v}$ sind koplanar (d.h. liegen auf einer Ebene).

Aufgabe 2

Durch die Gleichung

$$3x + 2y - z = 5$$

wird eine Ebene E gegeben. Durch die Punkte $A = (-1, 2, 3)$ und $B = (-3, 4, 1)$ geht eine Gerade g.

(i) Man bestimme eine Parameterdarstellung der Ebene E.

(ii) Welche Lage haben die Gerade g und die Ebene E zueinander?