Polardarstellung, Einheitswurzeln

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL VERSITÄT

27. 11. 2013

1. Aufgabe 4 Übungsblatt5
2. Einheitswurzeln
3. Polardarstellung
4. n^{ten} Wurzeln einer komplexen Zahl

1. Aufgabe 4 Übungsblatt5
2. Einheitswurzeln
3. Polardarstellung
4. n^{ten} Wurzeln einer komplexen Zahl

Aufgabe 4 Übungsblatt5

(a) Man gebe den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl an:

$$\frac{(\cos(\frac{\pi}{21}) + \sin(\frac{\pi}{21})i)^7}{(\cos(\frac{2\pi}{15}) + \sin(\frac{2\pi}{15})i)^5} .$$

(b) Man vereinfache folgenden Ausdruck:

$$z = 16 \left(\frac{i}{1-i}\right)^8 .$$

Aufgabe 4 Übungsblatt5 (a)

Eulersche Formel

$$e^{\varphi i} = \cos(\varphi) + \sin(\varphi) i \tag{1}$$

$\Longrightarrow \cos(\frac{\pi}{21}) + \sin(\frac{\pi}{21}) i = e^{\frac{\pi}{21} i}$.

$$\frac{(\cos(\frac{\pi}{21}) + \sin(\frac{\pi}{21}) i)^7}{(\cos(\frac{2\pi}{15}) + \sin(\frac{2\pi}{15}) i)^5} = \frac{\left(e^{\frac{\pi}{21} i}\right)^7}{\left(e^{\frac{2\pi}{15} i}\right)^5} = \frac{\left(e^{7 \cdot \frac{\pi}{21} i}\right)}{\left(e^{5 \cdot \frac{2\pi}{15} i}\right)} = \frac{\left(e^{\frac{\pi}{3} i}\right)}{\left(e^{\frac{2\pi}{3} i}\right)} = e^{\frac{\pi}{3} i - \frac{2\pi}{3} i}$$

$$\Longrightarrow \frac{(\cos(\frac{\pi}{21}) + \sin(\frac{\pi}{21}) i)^7}{(\cos(\frac{2\pi}{15}) + \sin(\frac{2\pi}{15}) i)^5} = e^{-\frac{\pi}{3} i} = \cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3}) i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \ .$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Aufgabe 4 Übungsblatt5 (b)

Im allgemein für $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ Argument $\varphi = 2\arctan(\frac{b}{r+a})$ und die Polardarstellung von z ist $z = re^{\varphi i}$.

$$z = 16\left(\frac{i}{1-i}\right)^8 = 16\left(\frac{i(1+i)}{(1-i)(i+1)}\right)^8 = 16\left(\frac{i+i^2)}{1-i^2)}\right)^8 =$$

$$16\left(\frac{i-1)}{1+1)}\right)^8 = 16\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^8$$

Man setzte $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ dann $|z_0| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\varphi = 2\arctan(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}) = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$$z = 16\left(\frac{i}{1-i}\right)^8 = 16\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^8 = 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^8 = 16\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 e^{6\pi i}$$

$$= 16 \cdot \frac{1}{16} = 1$$

Beispiel

Man berechne die n^{ten} Einheitswurzeln, also die Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1 \, .$$

Die Lösungen der obigen Gleichung sind

$$z_k = e^{\frac{k-1}{n} \cdot 2\pi i} \quad k = 1, \ldots, n \, .$$

Sonderfall Man berechne die fünften Einheitswurzeln, also die Lösungen der Gleichung

$$z^5 = 1 \, .$$

Die Lösungen sind:

$$z_k = e^{\frac{k-1}{5} \cdot 2\pi i} \quad k = 1, \ldots, 5 \, .$$

$$\text{d.h.} \quad k = 1 \Longrightarrow z_1 = e^{\frac{1-1}{5} \cdot 2\pi i} = 1, \quad k = 2 \Longrightarrow z_2 = e^{\frac{2-1}{5} \cdot 2\pi i} = e^{\frac{2\pi}{5} i}$$

$$z_3 = e^{\frac{4\pi}{5} i} \quad z_4 = e^{\frac{6\pi}{5} i} \quad z_5 = e^{\frac{8\pi}{5} i}$$

Aufgabe 1

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ und $z_2 = -1 - i$.

(i) Schreiben Sie z_1 und z_2 in Polardarstellung (Rechnen Sie in Grad. Stellen Sie dazu Ihren Taschenrechner auf DEG ein, **nicht** RAD).

(ii) Bestimmen Sie $w = z_1^6 z_2^8$ und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $w = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

(iii) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^2 + 4iz = z_2 + 4$ (mit z_2 wie oben)?

Polardarstellung

1a (i)
Im allgemein für $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, das Argument von z ist $\varphi = 2\arctan(\frac{b}{r+a})$ und die Polardarstellung von z ist $z = re^{\varphi i}$.

$$z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \implies \quad |z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\varphi_1 = 2\arctan\left(\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}\right) = -60^\circ$$

$$\implies z_1 = 2\sqrt{2}e^{-60^\circ i} = 2\sqrt{2}e^{300^\circ i}$$

$$z_2 = -1 - i\ ; \quad |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi_2 = 2\arctan\left(\frac{-1}{-1 + \sqrt{2}}\right) = -135^\circ \implies z_2 = \sqrt{2}e^{-135^\circ i} = \sqrt{2}e^{225^\circ i}$$

Polardarstellung

1a (ii)

$$w = z_1^6 z_2^8 = \left(2\sqrt{2}e^{300^\circ i}\right)^6 \left(\sqrt{2}e^{225^\circ i}\right)^8 = \left(2^6 2^3 e^{300^\circ i \cdot 6}\right)\left(2^4 e^{225^\circ i \cdot 6}\right)$$

$$= 2^{13} e^{i3600^\circ} = 8192 + 0i\ .$$

1a (iii) Lösungen der Gleichung $z^2 + 4iz = z_2 + 4$

$$z^2+4iz = z_2+4 \iff (z+2i)^2-(2i)^2 = z_2+4 \iff (z+2i)^2+4 = z_2+4$$

$$\iff (z+2i)^2 = z_2$$

$$\iff (z+2i)^2 = \sqrt{2}e^{225^\circ i} \iff z+2i = \pm\left(\sqrt{2}e^{225^\circ i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\implies z = 2i + 2^{\frac{1}{4}} e^{112.5^\circ i} \quad \text{oder} \quad z = 2i - 2^{\frac{1}{4}} e^{112.5^\circ i}$$

n^{ten} Wurzeln einer komplexen Zahl

Die n^{ten} Wurzeln einer komplexen w Zahl sind die Lösungen der Gleichung

$$z^n = w, \quad w \in \mathbb{C}$$

Die Lösungen der obigen Gleichung sind gegeben durch

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n} \cdot i} \quad k = 1, \dots, n \,, \quad \text{wobei} \quad w = re^{\varphi i} \,.$$

Beispiel Man berechne die vierten wurzeln von $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, also die Lösungen der Gleichung $z^4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$. Man setzte $w = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$. Die Polardarstellung von w ist $w = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$. Die Lösungen sind:

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n} \cdot i} \quad k = 1, \dots, 4 \quad \text{wobei} \quad r = 2, \varphi = \frac{\pi}{4} \,.$$

$$\text{d.h.} \quad k = 1 \Longrightarrow z_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2(1-1)\pi}{4} \cdot i} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\pi}{16} i},$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{9\pi}{16} i}, z_3 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{17\pi}{16} i}, z_4 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{25\pi}{16} i}$$