

# Gauß-Algorithmus, Lösbarkeit eines Gleichungssystems

Dr. E. Nana Chiadjeu

**U N I K A S S E L**  
**V E R S I T Ä T**

11. 12. 2013

1 Gerade-Ebene- Gleichungssysteme

2 Lösbarkeit eines Gleichungssystems

- 1 Gerade-Ebene- Gleichungssysteme
- 2 Lösbarkeit eines Gleichungssystems

# Gerade- Gleichungssysteme

Sei in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  die Gerade  $g$  beschrieben durch die folgende Parameterdarstellung:

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die parameterfreie Gleichung von  $g$ , indem Sie den Gauß-Algorithmus verwenden, um den Parameter  $t$  zu eliminieren.  
Hinweis:

- (i) Man schreibe die obige Parameterdarstellung von  $g$  in der

$$\text{Matrixform } A \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b}$$

- (ii) Man verwende den Gauß-Algorithmus, um die Parameter  $t$  zu eliminieren.



# Ebene- Gleichungssysteme

Sei im Raum  $\mathbb{R}^3$  die Ebene  $E$  beschrieben durch die folgende Parameterdarstellung:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

- (i) Schreiben Sie die obige Parameterdarstellung von  $E$  in der

$$\text{Matrixform } A \begin{pmatrix} s \\ t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$$

- (ii) Bestimmen Sie die parameterfreie Gleichung von  $E$ , indem Sie den Gauß-Algorithmus verwenden, um die Parameter  $s$  und  $t$  zu eliminieren.
- (iii) Bestimmen Sie die parameterfreie Darstellung der Ebene  $E$ , also  $\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_0$  über das Vektorprodukt und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $z$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a-2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

( $a$  und  $b$  seien beliebige reelle Zahlen).

Unter welcher Bedingung ist das Gleichungssystem

- (i) nicht lösbar?
- (ii) eindeutig lösbar?
- (iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 3 & a & a-2 & | & 0 \\ -1 & 2 & a & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & -3+a & a+1 & | & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \end{pmatrix} \begin{matrix} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \\ 0 & -3+a & a+1 & | & -3b \end{pmatrix} \begin{matrix} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & | & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{pmatrix} \begin{matrix} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{matrix}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 3 & a & a-2 & | & 0 \\ -1 & 2 & a & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & -3+a & a+1 & | & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \end{pmatrix} \begin{matrix} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \\ 0 & -3+a & a+1 & | & -3b \end{pmatrix} \begin{matrix} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & | & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{pmatrix} \begin{matrix} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{matrix}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2'') + (3'') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2'') + (3'') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2'') + (3'') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2'') + (3'') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 3 & a & a-2 & | & 0 \\ -1 & 2 & a & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & -3+a & a+1 & | & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \end{pmatrix} \begin{matrix} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \\ 0 & -3+a & a+1 & | & -3b \end{pmatrix} \begin{matrix} (1') \\ (2') \rightarrow (3') \\ (3') \rightarrow (2') \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & | & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{pmatrix} \begin{matrix} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{matrix}$$

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3') \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a(a-7) & -\frac{1}{3}b(a+6) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array} = -\frac{1}{3}(-3+a)(2') + (3')$$

Das Gleichungssystem ist

- (i) nicht lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) \neq 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und  $b \neq 0$ .
- (ii) eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) \neq 0$ , d.h. wenn  $a \neq 0$  und  $a \neq 7$ .
- (iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn  $a(a-7) = 0$  und  $b(a+6) = 0$ , d.h. wenn ( $a = 0$  oder  $a = 7$ ) und ( $b = 0$ ).

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $z$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

( $a$  und  $b$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  seien beliebige reelle Zahlen).

Wie groß ist der Rang der zugehörige Matrix und unter welcher Bedingung ist das System

- (i) nicht lösbar?
- (ii) eindeutig lösbar?
- (iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?