

Rang einer Matrix, Lineare Abbildung, Kern, Bild, Dimensionsformel

Dr. E. Nana Chiadjeu

U N I K A S S E L
V E R S I T Ä T

22. 01. 2014

1 Rang einer Matrix

2 Lineare Abbildung, Kern, Dimensionsformel

- 1 Rang einer Matrix
- 2 Lineare Abbildung, Kern, Dimensionsformel

Aufgabe 1: Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der folgenden 7×4 -Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der folgenden 7×4 -Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} z_4 \leftarrow z_7 \\ z_7 \leftarrow z_4 \end{array}.$$

Aufgabe 1: Rang einer Matrix

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} z_1 \\ z_1 + z_2 \\ z_3 \\ z_1 - z_4 \\ z_1 + z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \leftarrow z_6 \\ z_6 \leftarrow z_5 \\ z_7 \end{array}$$

Aufgabe 1: Rang einer Matrix

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ 2z_2 - z_3 \\ z_2 + z_4 \\ z_2 - z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{array}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A)=2 .$$

Rang einer Matrix

Man bestimme den Rang der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & a+1 & a-1 & 3a \\ a & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & a+1 & a-1 & 3a \\ a & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) - 3(1) \\ -a(1) + (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & -2a-1 & 3a-6 \\ 0 & -a+2 & -a^2+1 & -2a+2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \\ (3') = (2) + (3) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & -2a-1 & 3a-6 \\ 0 & 0 & -a(a+2) & a-4 \end{array} \right)$$

Rang (A) = 3 für alle $a \in \mathbb{R}$.

Lineare Abbildung, Kern, Dimensionsformel

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird für alle Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -4x + 6y \end{pmatrix} .$$

- (a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.
- (b) Berechnen Sie $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und leiten Sie die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen her.
- (c) Bestimmen Sie den Kern von f (Nullraum) und bestätigen Sie die Dimensionsformel.