# Lösbarkeit eines Gleichungssystems anhand des Rangs, Kern, Bild

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL VERSITÄT

29. 01. 2014

# Aufgabe 4 Übungsblatt 11

Bezüglich der Basen $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}^2$ und $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}^3$ werde eine lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ durch die Matrix beschrieben:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Wie lautet die Matrix von $f$ bezüglich der Basen $\vec{\tilde{a}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\tilde{a}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}^2$ und $\vec{\tilde{b}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\tilde{b}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\vec{\tilde{b}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}^3$?

# Lösung

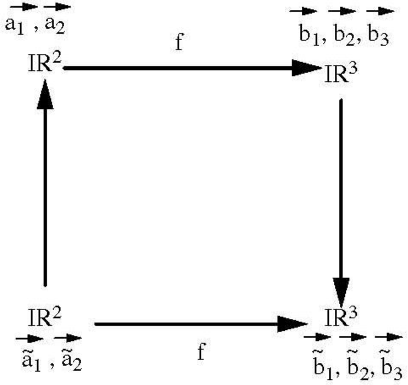


**Bild 6.1:** *Basiswechsel bei einer linearen Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$*

Für die Lineare Abbildung $f$, der Basisübergang von $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ zur $\vec{\tilde{a}}_1, \vec{\tilde{a}}_2$ wird gegeben durch die Matrix $(\vec{a_1}, \vec{a_2})^{-1} \cdot (\vec{\tilde{a}}_1, \vec{\tilde{a}}_2)$

# Lösung

der Basisübergang von $\vec{\tilde{b}}_1, \vec{\tilde{b}}_2, \vec{\tilde{b}}_3$ zu $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_2$ wird gegeben durch die Matrix $(\vec{\tilde{b}}_1, \vec{\tilde{b}}_2, \vec{\tilde{b}}_3)^{-1} \cdot (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_2)$ und die gesuchte Matrix ist

$$\tilde{M}_f = (\vec{\tilde{b}}_1, \vec{\tilde{b}}_2, \vec{\tilde{b}}_3)^{-1} \cdot (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_2) \cdot M_f \cdot (\vec{a}_1, \vec{a}_2)^{-1} \cdot (\vec{\tilde{a}}_1, \vec{\tilde{a}}_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & -i \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+i & 1 \\ 4i & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 1

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad \text{wobei}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & -2 & 2 \\ -a & 2 & -a \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

($a$ und $b$ seien beliebige reelle Zahlen).
Begründen Sie anhand des Rangs, unter welcher Bedingung das obige Gleichungssystem lösbar ist.

# Lösbarkeit eines Gleichungssystems anhand des Rangs

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -a & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ -a & 2 & -a & b \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ a & 1 & -a & 0 \\ -a & 2 & -a & b \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \to (2) \\ (2) \to (1) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -a & 0 \\ 0 & 3+2a & -5a & 0 \\ 0 & 3 & -2a & b \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -a(1)+3(2) \\ (3') = (2)+(3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -a & 0 \\ 0 & 3 & -2a & b \\ 0 & 3+2a & -5a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') = (3') \\ (3'') = (2') \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -a & 0 \\ 0 & 3+2a & -5a & b \\ 0 & 0 & a(9-4a) & b(3+2a) \end{array}\right) \begin{array}{l} (1''') \\ (2''') \\ (3''') = -3(3'') + (3+2a)(2'') \end{array}$$

(a) Das GS. ist lösbar wenn Rang(A)=Rang($A|\vec{b}$) d.h.

(i) wenn $a(9-4a) \neq 0$, d.h. wenn $a \neq 0$ und $a \neq \frac{9}{4}$.

oder

(ii) wenn $a(9-4a) = 0$ und $b(3+2a) = 0$, d.h. wenn ($a = 0$ und $b = 0$) oder ($a = \frac{9}{4}$ und $b = 0$).

(b) Das GS. nicht lösbar, wenn Rang(A)$\neq$ Rang($A|\vec{b}$) d.h. wenn $a(9-4a) = 0$ und $b(3+2a) \neq 0$, d.h. wenn ( $a = 0$ oder $a = \frac{9}{4}$) und $b \neq 0$ .

# Kern, Bild

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ wird gegeben durch die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Man berechne den Kern und das Bild von $f$ und bestätige die Dimensionsformel