Charakteristisches Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisiebarkeit

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL
VERSITÄT

12. 02. 2014

Aufgabe 4 Übungsblatt 13

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A_α und prüfe ob A diagonalisierbar ist.

Lösung

1) Charakteristisches Polynom:

$$P_A(x) = det(A - xE) = det\left(\begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 4 Übungsblatt 13

1) Charakteristisches Polynom:

$$P_A(x) = det(A{-}xE) = det\left(\begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\alpha-x & 0 & \alpha \\ 0 & 2-x & 0 \\ -\alpha & 0 & 2+\alpha-x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+2}(2-x)\begin{vmatrix} 2-\alpha-x & \alpha \\ -\alpha & 2+\alpha-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)\left[(2-\alpha-x)(2+\alpha-x) - (-\alpha)(\alpha)\right]$$

$$= (2-x)\left[(2-x-\alpha)(2-x+\alpha) + \alpha^2\right]$$

$$= (2-x)\left[(2-x)^2 - \alpha^2 + \alpha^2\right].$$

$$= (2-x)^3 \quad \text{Eingentwert:} \quad P_A(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

Aufgabe 4 Übungsblatt 13

1) Eigenvektoren:
Die sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$A \cdot \vec{u} = x\vec{u} \iff (A - x \cdot E)\vec{u} = \vec{0}$$

Für $x = 2$ haben wir:

$$(A-2\cdot E)\vec{u} = \vec{0} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2-\alpha-2 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2+\alpha-2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1') \\ (2') \\ (3') = -(1') + (3) \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array}$$

Aufgabe 4 Übungsblatt 13

1) Eigenvektoren:

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array}$$

$\alpha = 0$ wird die obere erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array}$$

Dann sind x, y und z frei wählbar.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Übungsblatt 13

Die Vektoren

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sind die Eigenvektoren zum Eigenwert $x = 2$ und A ist somit diagonalisierbar.

Aufgabe 4 Übungsblatt 13

1) Eigenvektoren:
$\alpha \neq 0$ haben wir

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \end{array}$$

Man setze $y = \lambda$ und $z = \gamma$ Aus (1) hat man $-\alpha x + \alpha\gamma = 0 \Longrightarrow x = \gamma$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sind die Eigenvektoren zum Eigenwert $x = 0$ und A ist somit nicht diagonalisierbar, da wir nur noch 2 Eigenvektoren haben.