Prof. Dr. Andreas Bley
Dr. Anen Lakhal

UNIKASSEL VERSITÄT

Lineare Algebra für

Übungsblatt 02 | **Elektrotechniker/Informatiker Mechatroniker/Wirtschaftsingenieure** | **07.11.2016**

Aufgabe 1

Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k}) = n + 1$.

(c) Für $n \geq 3$ gilt: $(1 + \frac{1}{n})^n < n$.

Aufgabe 2

(a) Prüfen Sie, ob die Abbildung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b} \mapsto (a - b)$ wohldefiniert ist.

(b) Geben Sie das Urbild von Null und das Bild der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto 2x$$

.

(c) Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

(i) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto n + 1.$

(ii) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad n \mapsto 2n.$

(iii) $f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \qquad x \mapsto x^2 + 1.$

(iv) $f_4 : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad (n, m) \mapsto n + m.$

Aufgabe 3

Gegeben sei eine Parallelogramm $ABCD$, wobei die Punkte entgegen dem Uhrzeigersinn benannt sind. Der Ortsvektor des Eckpunktes A sei $\vec{x}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die von A ausgehenden Seiten haben die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Eckpunkte B, C und D.

(b) Berechnen Sie die Richtungsvektoren der Diagonalen AC und BD sowie ihre Längen.

(c) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Mittelpunkte der Diagonalen.

Aufgabe 4 Gegeben Sei die Punkte $A = (-1, 2, 3), B = (3, -2, -1)$ und $C = (2, -3, 1)$ im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC, welcher der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist.

(**Bitte wenden!**)

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(1) Zeigen Sie durch Vollständige Induktion folgende Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

(b) Für $n \geq 4$ gilt: $n! > 2^n$.

(2) Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

(i) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto n^3$.

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 + 4x + 9$.

(3) Gegeben Sei ein Dreieck $A_1B_1C_1$. Die Mittelpunkte der Seiten A_1B_1, B_1C_1 und C_1A_1 seien C_2, A_2 und B_2. Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die Seitenhalbierenden der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ im gleichen Punkt schneiden.

Abgabetermin: Dienstag, 15.11.2016 um 10:00 Uhr in den Abgabefächern vor dem Raum 2303, WA.
WICHTIG: Aufgabe 5 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Versehen Sie Ihre Blätter vor dem Abgeben mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe und **tackern** Sie diese – Verwenden Sie bitte bei der Abgabe das folgende Deckblatt. Weitere Informationen auf http://www.mathematik.uni-kassel.de/mathfb16/index.html

Hausaufgabe 02

Nachname:														
Vorname:														
Studiengang:														
Matr.-Nr.:														
Gruppe:														
Punkte:														