Prof. Dr. Andreas Bley
Dr. Anen Lakhal

Lineare Algebra für

UNIKASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 08 **Elektrotechniker/Informatiker** **19.12.2016**
Mechatroniker/Wirtschaftsingenieure

Aufgabe 1
Gegeben seien die $\mathbb{C}$-Vektorräume $\mathbb{C}^3$ und $\mathbb{C}_2[x] := \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$. Entscheiden Sie, ob folgende Mengen Unterräume bzw. affine Teilräume sind.

(a) $\mathcal{U} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid ix_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(b) $\mathcal{V} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid \ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \text{ und } x_1 + 2ix_2 + x_3 = 0 \right\}$

(c) $\mathcal{W} = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}_2[x] \mid a = 2b + c\}$

Aufgabe 2
Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ gegeben.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

(b) Bestimmen Sie ein $v \in \mathbb{R}^4$ so, dass v_1, v_2, v_4, v eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

(c) Geben Sie eine Basis von $\operatorname{lin}(v_1, v_1 + v_2 + v_3, v_2, v_3)$

Aufgabe 3
Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathcal{V} := \mathbb{R}_2[x]$ gegeben.

$$p_1(x) = 2 + 4x + 3x^2, \quad p_2(x) = 3 + 5x - x^2, \quad p_3(x) = 2x + 11x^2, \quad p_4(x) = 2x + 12x^2.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten der Vektoren p_1, p_2, p_3 und p_4 bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{K} = (1, x, x^2)$ des Vektorraums $\mathcal{V}$.

(b) Welcher der Vektoren p_3 und p_4 ist Linearkombination der Vektoren p_1 und p_2

(c) Welches der beiden Vektorsysteme

$$\mathcal{B}_1 = (p_1, p_2, p_3) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 = (p_1, p_2, p_4)$$

ist linear unabhängig. Wann handelt es sich um eine Basis des Vektorraums $\mathcal{V}$?

(**Bitte wenden!**)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(1) Entscheiden Sie mit Begründung, ob folgende Mengen Teilräume sind.

(a) $\mathcal{U}_a = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + a = 0 \ \wedge \ x_1 + 3ax_3 = 0; \right\}, \ a \in \mathbb{R}.$

(b) $\mathcal{V} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3(x_1^2 + x_2^2) = 0 \right\}.$

(c) $\mathcal{W} = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid p^{'}(x) = 3 \right\}$, wobei $p^{'}(x)$ die erste Ableitung von $p(x)$ ist.

(2) Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ gegeben.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 14 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\mathcal{L} = \mathrm{lin}\,(v_1, v_2, v_3)$.

(b) Gehören die Vektoren $\omega_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $\omega_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der linearen Hülle $\mathcal{L}$ an?

Abgabetermin: Dienstag, 10.01.2017 um 10:00 Uhr in den Abgabefächern vor dem Raum 2303, WA.
WICHTIG: Aufgabe 4 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Versehen Sie Ihre Blätter vor dem Abgeben mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe und **tackern** Sie diese – Verwenden Sie bitte bei der Abgabe das folgende Deckblatt. Weitere Informationen auf `http://www.mathematik.uni-kassel.de/mathfb16/index.html`

Hausaufgabe 08

Nachname:														
Vorname:														
Studiengang:														
Matr.-Nr.:														
Gruppe:														
Punkte:														