

Aufgabe 1

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und assoziierter Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie für $v, w \in V$, dass gilt:

- (a) **Kosinussatz:** $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$
- (b) **Parallelogrammgleichung:** $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$
- (c) **Dreiecksungleichung:** $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Aufgabe 2

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}$ spannen einen Unterraum U des Vektorraums $\mathbb{C}^3$ auf. Man gebe eine Orthonormalbasis des Unterraums U an.

Aufgabe 3

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und sei U der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Unterraum von V . Bestimmen Sie eine Basis des zu U orthogonalen Untervektorraums

$$U^\perp := \{v \in V \mid v \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

- (1) Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und assoziierter Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie für $u, v, w \in V$ den **Satz des Pythagoras**:

$$(u - w) \perp (v - w) \implies \|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 = \|u - v\|^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Kosinussatz.

- (2) Gegeben sei im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ die Basis

$$B = \left(b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right).$$

Man erzeuge aus B eine Orthonormalbasis $Q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)})$, sodass $\text{lin}(q^{(1)}, \dots, q^{(i)}) = \text{lin}(b^{(1)}, \dots, b^{(i)})$ für alle $i = 1, \dots, 3$.

Abgabetermin: Dienstag, 17.01.2017 um 10:00 Uhr in den Abgabefächern vor dem Raum 2303, WA.

WICHTIG: Aufgabe 4 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Versehen Sie Ihre Blätter vor dem Abgeben mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe und **tackern** Sie diese – Verwenden Sie bitte bei der Abgabe das folgende Deckblatt. Weitere Informationen auf <http://www.mathematik.uni-kassel.de/mathfb16/index.html>

Hausaufgabe 09

Nachname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--

Gruppe:

--	--

Punkte:

--	--