

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Es sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -2 & b \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante von M

- (a) durch Laplace Entwicklung
- (b) indem Sie sie auf Dreiecksgestalt bringen.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & -2 & 0 \\ a & 0 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & a & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,5}, \quad N_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ a & 2 & a & \dots & a \\ a & a & 3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Aufgabe 3

Es sei M eine Blockmatrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n+m),(n+m)},$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,m}$ und $D \in \mathbb{K}^{m,m}$.

- (a) Überprüfen Sie, dass gilt:

$$M = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_m \end{pmatrix},$$

wobei $E_p \in \mathbb{K}^{p,p}$ die Einheitsmatrix ist.

- (b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$.
- (c) Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4,4}.$$

Bringen Sie durch Zeilenoperationen bzw. Spaltenoperationen die Matrix M in Form $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ und berechnen Sie ihre Determinante.