KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

9.9.2014

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 13 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folgen:

$$a_n = \frac{\sin(n^2) + 3\,n}{n+1}\,,\ b_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2}}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

   (b) Die Folge c_n wird gegeben durch die Rekursion:

$$c_1 = 1\,, c_{n+1} = q\,\sqrt{c_n}\,, q \in \mathbb{R}_{>0}\,.$$

   Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $c_n = q^{b_n}$.

2. (a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x)}{\tan(3\,x)}\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x\,e^x - x}\,.$$

   (b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(e^x - 1)\,, x \in \mathbb{R}_{>0}\,.$
   Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.
   Geben Sie den Wertebereich von f an, und berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

3. (a) Gegeben ist die Funktion: $f(x) = x\,e^{-x^2}$.
   Besitzt f Extremalstellen?
   Berechnen Sie die Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ der Funktion f.
   (Hinweis: Beginnen Sie mit der Exponentialreihe $e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$).

   (b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx\,, \text{(substituieren Sie } t = e^x)\,, \int \frac{x-3}{(x-1)\,(x-2)}\,dx\,.$$

Lösungen:

1.a)

$$a_n = \frac{\sin(n^2) + 3\,n}{n+1} = \frac{\frac{\sin(n^2)}{n} + 3}{1 + \frac{1}{n}}\,,$$

$$\left|\frac{\sin(n^2)}{n}\right| \le \frac{1}{n}\,,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)}{n} = 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3\,.$$

$$b_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2}} = \frac{2^{-1}\,2^n - 1}{2^{-2}\,2^n} = \frac{2^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^{-2}}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2\,.$$

1.b)

Ind. Anf.: $c_1 = 1\,, c_2 = q\,\sqrt{1} = q^1\,, b_2 = \frac{2^{2-1}-1}{2^{2-2}} = 1\,.$

Ind. Ann.: Für ein $n \ge 2$ gelte: $c_n = q^{b_n}$.

Ind. Schluss:

$$c_{n+1} = q\,c_n^{\frac{1}{2}} = q\,q^{\frac{b_n}{2}} = q^{1+\frac{b_n}{2}}\,,$$

$$1 + \frac{b_n}{2} = \frac{2^{n-1} + 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = b_{n+1}\,,$$

$$c_{n+1} = q^{b_{n+1}}\,.$$

2.a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\,x)}{\tan(3\,x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\,\cos(2\,x)}{3\,(1+(\tan(3\,x))^2)} = \frac{2}{3}\,,$$

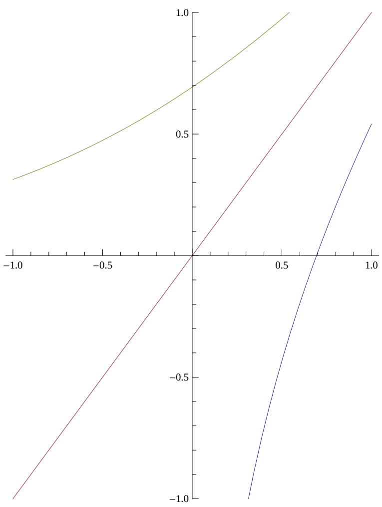
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x\,e^x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x\,e^x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x\,e^x + 2\,e^x} = \frac{1}{2}\,.$$

2.b) e^x, $x > 0$, nimmt alle Werte $y > 1$ an.
$e^x - 1$, $x > 0$, nimmt alle Werte $y > 0$ an.
Wertebereich des Logarithmus ist $\mathbb{R}$.
Wertebereich von $f(x) = \ln(e^x - 1)$ ist $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}\,,$$

$x > 0:\ e^x > 1\,, e^x - 1 > 0$, $f'(x) > 0$, also f streng monoton wachsend.
Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} \ln(e^x - 1) &= y \\ e^x - 1 &= e^y \\ e^x &= e^y + 1 \\ x &= \ln(e^y + 1) \\ f^{-1}(x) &= \ln(e^x + 1)\,. \end{aligned}$$



Die Funktion $f(x) = \ln(e^x - 1)$ und die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \ln(e^y + 1)$

3.a)

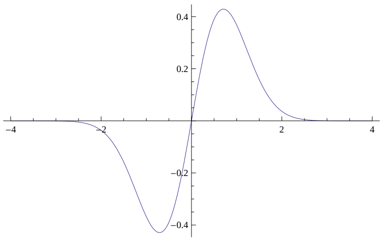
$$f(x) = x\,e^{-x^2}\,, \quad f'(x) = (1-2\,x^2)\,e^{-x^2}\,,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$f''(x) = (-4\,x + (1-2\,x^2)\,(-2\,x))\,e^{-x^2} = 2\,x\,(-3+2\,x^2)\,e^{-x^2}\,,$$

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0\,, \text{Minimum}\,, \quad f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0\,, \text{Maximum}\,,$$

$$f(x) = x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\frac{x^{2\,\nu+1}}{\nu!}\,.$$



Die Funktion $f(x) = x\,e^{-x^2}$

3.b)

Substitution:

$$t = e^x\,, x = \ln(t)\,, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\,,$$

$$\int\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx = \left(\int\frac{t}{t+\frac{1}{t}}\,\frac{1}{t}\,dt\right)_{t=e^x} = \left(\int\frac{t}{t^2+1}\,dt\right)_{t=e^x}\,,$$

$$\int\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\,\left(\int\frac{2\,t}{t^2+1}\,dt\right)_{t=e^x} = \frac{1}{2}\,\ln(t^2+1)_{t=e^x}+c = \frac{1}{2}\,\ln(e^{2\,x}+1)+c\,.$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-3}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2} = \frac{a\,(x-2)+b\,(x-1)}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{(a+b)\,x-2\,a-b}{(x-1)\,(x-2)}\,,$$

$$a+b=1\,, \quad -2\,a-b=-3\,,$$

$$a=2\,, b=-1\,,$$

$$\int\frac{x-3}{(x-1)\,(x-2)}\,dx = 2\,\ln(|x-1|)-\ln(|x-2|)+c\,.$$