KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

08.09.2015

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 13 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

$$a_n = \frac{n^2 - (-1)^n}{\sqrt{3n^4 + 3}}, \quad b_n = \sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 1}, \; n \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2:

Sei $a > 0$ ein reeller Parameter und eine Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_a(x) = x^2 e^{a-x}.$$

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von f_a.

(b) Berechnen Sie alle lokalen Extremstellen von f_a und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

(c) Berechnen Sie die Wendepunkte von f_a.

(d) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x)$.

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ um den Punkt $x_0 = 0$ unter Verwendung der Taylorreihe: $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$I_1 = \int \frac{\sin(x)}{1 + (\cos(x))^2} dx, \qquad I_2 = \int_1^\infty e^{-x}(x-1)\, dx.$$

Hinweis: Man verwende für I_1 die Substitution: $t = \cos(x)$.

Lösungsskizze

Aufgabe 1 **[5P + 5P]**

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1 - \frac{(-1)^n)}{n^2})}{n^2(\sqrt{3 + \frac{3}{n^2}})} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ (3 + \frac{2}{n})}{n\ (\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b) **1- Induktionsanfang:**

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

2- Induktionsschritt:

Vorraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ gilt für ein } n \in \mathbb{N}$$

Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **[1P + 4P + 2P + 3P]**

(a)

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ da } e^{a-x} > 0.$$

(b)

$$\begin{aligned} f_a^{'}(x) &= 2xe^{a-x} - x^2 e^{a-x} = x(2-x)e^{a-x}. \\ f_a^{''}(x) &= (2-2x)e^{a-x} - (2x - x^2)e^{a-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{a-x}. \end{aligned}$$

Extremstellen:

$$f_a^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow x(2-x)e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2.$$

$$f_a^{''}(0) > 0,\ \textbf{Minimum}, \quad f_a^{''}(2) < 0,\ \textbf{Maximum}.$$

(c)

$$f_a^{'''}(x) = (-x^2 + 6x - 6)e^{a-x}.$$

Wendepunkte:

$$f_a^{''}(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2)e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2},$$

wobei $f_a^{'''}(x)(2 \pm \sqrt{2}) \neq 0$.

(d)

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{a-x} = (\infty\cdot\infty) = \infty.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^2 e^{a-x} = (\infty\cdot 0) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x-a}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{L'hospital}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^{x-a}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{l'Hospital}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x-a}} = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **[4P + 3P + 3P]**

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\Big(-x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\Big)\\
&= \frac{1}{x^2}\Big(-x+x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\Big)\\
&= \frac{1}{x^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{k-2}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+2}x^k \quad \text{(optional).}
\end{aligned}$$

(b) (i) **Substitution:**

$$t=\cos(x), \quad \frac{dt}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin(x)}.$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2}dx = \Big(-\int\frac{1}{1+t^2}dt\Big)_{t=\cos(x)}\\
&= -\arctan(\cos(x)) + C.
\end{aligned}$$

(ii) **Partielle Integration** mit

$$f^{'}(x) = e^{-x} \text{ und } g(x) = x - 1$$

liefert

$$\int e^{-x}(x-1)dx = [-e^{-x}(x-1) + \int e^{-x}dx] = -xe^{-x}.$$

also ist

$$\int\limits_1^\infty e^{-x}(x-1)dx = -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e},$$

da $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0.$