

KLAUSUR

Analysis
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

13.09.2016

Dr. habil Sebastian Petersen
Dr. Anen Lakhali

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:
-------	----------	------------------------	--------------

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)
----	----	----	----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

**Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!**

Aufgabe 1:

- (a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ mit

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 3}, \quad b_n = \left(\frac{n-5}{n}\right)^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Hinweis: $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p = e^x$.)

- (b) Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ mit Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = (a_n)^2 + \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

und mit $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$.

- (i) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend ist.
(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Im folgenden steht \ln für den Logarithmus zur Basis e .

Aufgabe 2:

- (a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x^2}$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - e^{2x+1}}{(x-1)^2}$.

- (b) Gegeben sei die Funktion $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln(1-t) dt$. Berechnen Sie die erste Ableitung $h'(x)$. Das Ergebnis soll in möglichst einfacher, integralfreier Form angegeben werden.

- (c) Gegeben sei die Funktion $g :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+2)^x$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion g im Punkt $x_0 = 0$. (Hinweis: $a^x = \exp(x \ln(a))$ für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 3:

- (a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$.
- (i) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen f' und f'' von f und geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f, x, 0)$ von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.
- (ii) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f und klassifizieren Sie diese.
- (b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:
- (i) $\int \frac{5x - 1}{(x - 2)(x + 1)} dx$. (Ansatz: $\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$.)
- (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx$. (Hinweis: Man substituiere $u = \sin(x)$.)

Aufgabe 4:

- (a) Sei $a > 0$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{(1 + a)^k}$.
- (b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + (-2)^k}{k} (x + 1)^k$.

Aufgabe 5:

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2(y + 1) + y^3 + 3y^2 + 2y$.

- (a) Bestimmen Sie den Gradient und die Hesse-Matrix von f .
- (b) Finden Sie alle kritischen Punkte von f und entscheiden Sie für jeden der kritischen Punkte von f , ob dort ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt ist.

Aufgabe 6:

- (a) Gegeben sei das Integral

$$\int_0^3 \left(\int_{1+x^2}^{3x+1} f(x, y) dy \right) dx.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie dann die Integrationsreihenfolge.

- (b) Sei der Bereich $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ gegeben. Skizzieren Sie D und berechnen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten das Integral

$$\int_D (3x + 4y) d(x, y).$$

Lösungsskizze

Aufgabe 1

(a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n(2 + \frac{1}{2^n})}{2^n(1 + \frac{3}{2^n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \frac{1}{2^n})}{(1 + \frac{3}{2^n})} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \frac{-5}{n})^n} = \frac{1}{e^{-5}} = e^5.$$

(b) (i) Für jeden Startwert $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$ ist die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend, weil

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + \frac{1}{4} - a_n = (a_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0.$$

Außerdem ist $a_n > 0$ für alle $n \geq 1$. (Beachte zwei Mal: Quadrate von reellen Zahlen sind nicht-negativ.)

(ii) Sei $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$ (*). Wir zeigen mit vollständiger Induktion: Es gilt $a_n \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Der *Induktionsanfang* ist hier die Voraussetzung (*); wir müssen nur noch den *Induktionsschritt* durchführen.

Nach Induktionsannahme gilt $a_n \leq \frac{1}{2}$. Aus Teil (b)(i) und (*) ist bekannt, dass $a_n \geq 0$. Daraus folgt

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \leq (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dies beendet den Induktionsbeweis.

Die Folge $(a_n)_n$ ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt. Mit dem Monotoniekriterium folgt, dass $(a_n)_n$ konvergiert. Sei $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Für den Grenzwert a muss dann

$$a = a^2 + \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

gelten, also folgt $a = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin(3x)}{12x} && \text{(L'Hospital)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos(3x)}{12} && \text{(L'Hospital)} \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - e^{2x+1}}{(x-1)^2} = \frac{0 - e}{(-1)^2} = -e.$$

- (b) Betrachte den Integranden $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t} \ln(1-t)$. Die Funktion f ist stetig auf $]0, 1[$. Sie besitzt also eine Stammfunktion, die wir mit F bezeichnen. Es folgt

$$h(x) = F(x^2) - F(x)$$

und daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\ &= 2x \frac{1}{x^2} \ln(1-x^2) - \frac{1}{x} \ln(1-x) \\ &= 2 \frac{1}{x} \ln(1-x^2) - \frac{1}{x} \ln(1-x) \\ &= \frac{1}{x} \ln \left(\frac{(1-x^2)^2}{1-x} \right) \\ &= \frac{1}{x} \ln \left((1+x)^2(1-x) \right). \end{aligned}$$

- (c) Die Gleichung der Tangente an die Funktion g im Punkt x_0 ist

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0).$$

Wir können die Funktion g wie folgt umformen:

$$g(x) = e^{x \ln(x+2)}.$$

Daraus folgt

$$g'(x) = \left(\ln(x+2) + \frac{x}{x+2} \right) e^{x \ln(x+2)}.$$

Also ist die Gleichung der Tangente an die Funktion g in $x_0 = 0$ durch

$$y = 1 + \ln(2)x$$

gegeben.

Aufgabe 3

- (a) Betrachte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$.

(i) Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Es folgt $f(0) = \ln(1) = 0$, $f'(0) = -1$ und $f''(0) = 1$. Das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_2(f, x, 0) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \\ &= -x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

(ii) Offenbar¹ gilt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Also ist $a = \frac{1}{2}$ einzige Nullstelle von f' und daher einziger Kandidat für ein Extremum. Es ist $f''(a) > 0$, daher hat f in $a = \frac{1}{2}$ ein striktes lokales Minimum (und keine weiteren Extrema).

(b) (i) Es gilt

$$\frac{5x - 1}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{3}{x - 2} + \frac{2}{x + 1},$$

wie man mit dem vorgeschlagenen Ansatz durch Koeffizientenvergleich leicht sieht. Es folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 1}{(x - 2)(x + 1)} dx &= \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{2}{x + 1} dx \\ &= 3 \ln |x - 2| + 2 \ln |x + 1| + C. \end{aligned}$$

(ii) Substitution: $\sin(x) = u$, $\cos(x)dx = du$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \frac{du}{\sqrt{1 - u}} \\ &= \int_0^1 (1 - u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \left[-2(1 - u)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Die Variable a ist unabhängig vom Summationsindex, somit gilt mit $\frac{1}{a+1} < 1$ und der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{(1+a)^k} &= a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^k} \\ &= a \left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(1+a)} \right)^k \right) \\ &= a \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1+a}} \right) \\ &= a \left(-1 + \frac{1+a}{a} \right) = 1. \end{aligned}$$

¹Beachte: Der Nenner von f' hat keine Nullstellen, wie man mit der pq -Formel leicht sieht.

(b) Sei $a_k = \frac{3^k + (-2)^k}{k}$. Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{3^{k+1} + (-2)^{k+1}}{3^k + (-2)^k} \frac{k}{k+1} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{3^k(3 - 2(\frac{-2}{3})^k)}{3^k(1 + (\frac{-2}{3})^k)} \frac{k}{k+1} \right| \\ &= 3. \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist also $\rho = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 5

(a)

$$f(x, y) = x^2(y + 1) + y^3 + 3y^2 + 2y.$$

$$\nabla f(x, y) = (2x(y + 1), x^2 + 3y^2 + 6y + 2), \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y + 2 & 2x \\ 2x & 6y + 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Als notwendige Bedingung für eine Extremstelle hat man:

$$\nabla f(x, y) = \vec{0}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(1) \quad 2x(y + 1) = 0$$

$$(2) \quad x^2 + 3y^2 + 6y + 2 = 0.$$

Aus (1) folgt $x = 0 \vee y = -1$.

$x = 0$ in (2) einsetzen liefert

$$3y^2 + 6y + 2 = 0 \Rightarrow y_{1/2} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$y = -1$ in (2) einsetzen liefert

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1.$$

Man erhält vier kritische Punkte, die man wie üblich mit der Hesse-Matrix klassifizieren kann. Es ergibt sich folgende Tabelle.

Kritische Stelle	Typ
$(0, -1 + \sqrt{1/3})$	lokales Minimum
$(0, -1 - \sqrt{1/3})$	lokales Maximum
$(1, -1)$	Sattelpunkt
$(-1, -1)$	Sattelpunkt

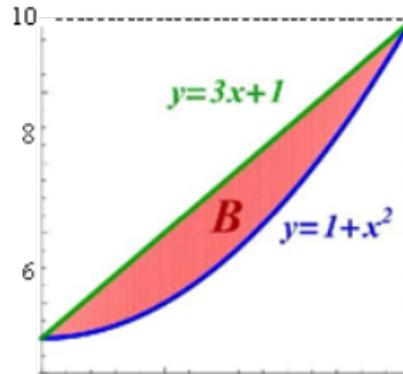


Abbildung 1: Skizze (6-a)

Aufgabe 6

- (a) Die beiden den Bereich B begrenzenden Kurven können in der Form $x = \frac{y-1}{3}$ bzw. $x = \sqrt{y-1}$ (Wurzel mit positiven Vorzeichen, da $x \geq 0$ im Bereich B) als Funktionen in y ausgedrückt werden. damit haben wir

$$\int_0^3 \int_{1+x^2}^{3x+1} f(x, y) dy dx = \int_1^{10} \int_{\frac{y-1}{3}}^{\sqrt{y-1}} f(x, y) dx dy.$$

- (b) Unter Verwendung der Polarkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_D (3x + 4y) d(x, y) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (3r \cos \varphi + 4r \sin \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (3 \cos \varphi + 4 \sin \varphi) r^2 dr d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(3 \cos \varphi + 4 \sin \varphi) \frac{r^3}{3} \right]_{r=1}^2 d\varphi \\ &= \frac{7}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \varphi + 4 \sin \varphi) d\varphi \\ &= \frac{7}{3} [3 \sin \varphi - 4 \cos \varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{7}{3} (3 - (-3)) = 14 \end{aligned}$$