FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften **WiSe 2015**
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Matthias Bolten
M.Sc. Khalid Adrigal

Finite-Elemente-Methoden

Aufgabenblatt 4

Besprechung: 24.11.2015

Aufgabe 11 :
Gegeben sei die Helmholz-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ auf } \partial\Omega. \tag{1}$$

Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) u ist Lösung von (1).

b) Es gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) \, d(x,y) = \int_\Omega fv \, d(x,y) + \int_{\partial\Omega} gv \, d\nu$$

für alle $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

c) u ist die Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right) \, d(x,y) - \int_\Omega fv \, d(x,y) - \int_{\partial\Omega} gv \, d\nu = \min!$$

unter allen $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

Aufgabe 12 :
Gegeben sei das Modellproblem

$$-u'' = f \quad \text{in } \Omega = (0,1), \quad u(0) = 0,' (1) = 0.$$

a) Geben Sie die Steifigkeitsmatrix für das eindimensionale Modellproblem für eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$.

b) Zeigen Sie, dass für den Lastvektor gilt

$$b_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})(f(x_i) + \mathcal{O}(h)), \quad h := \max_i h_i.$$

Aufgabe 13 :
Im Beispiel 4.3 seien auf der unten liegenden Seite des Quadrats die Dirichlet- Randbedingungen durch die natürlichen Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ersetzt. Man verifiziere, dass sich an diesen Randpunkten der Differenzenstern

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1/2 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

einstellt.

Abgabe: **am 17.11.2015**