

Finite-Elemente-Methoden

Aufgabenblatt 5

Besprechung: 01.12.2015

Aufgabe 14 : (7P)

Die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)^n$ bzgl. der Norm

$$\|v\|^2 := \|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} v\|_{0,\Omega}^2$$

wird als $H(\operatorname{div}, \Omega)$ bezeichnet und die Norm in (5.12) entsprechend mit $\|\cdot\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$. Offensichtlich ist $H^1(\Omega)^n \subset H(\operatorname{div}, \Omega) \subset L^2(\Omega)^n$. Man zeige, dass eine Menge $S_h \subset L^2(\Omega)^n$ von stückweisen Polynomen genau dann in $H(\operatorname{div}, \Omega)$ enthalten ist, wenn die Komponente in Richtung der Normalen, also $v \cdot \nu$ für jedes $v \in S_h$, an den Elementgrenzen stetig ist. Hinweis: Man lehne sich an Satz 5.2 an und greife auf (3.13) zurück.

Aufgabe 15 : (6P)

Man zeige, dass die stückweise kubischen, stetigen Viereck-Elemente, deren Einschränkung auf die Kanten quadratische Polynome sind, gerade die serendipity Klasse der 8-Knoten-Elemente bilden.

Hinweis: Man betrachte zunächst Rechtecke mit achsenparallelen Seiten.

Aufgabe 16 : (8P)

Für Dreieckelemente mit quadratischen Polynomen betrachte man den Unterraum der Funktionen, deren Normalableitung auf den drei Rändern jeweils konstant sind. Man bestimme seine Dimension und unterscheide dazu zwischen rechtwinkligen und nichtrechtwinkligen Dreiecken.