FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften **WiSe 2015**
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Matthias Bolten
M.Sc. Khalid Adrigal

Finite-Elemente-Methoden

Aufgabenblatt 7

Besprechung: 15.12.2015

Aufgabe 20 : (7P)
Man betrachte

a) die Fourier-Reihen $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ über $[0, 2\pi]$,

b) die Fourier-Reihen $\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx+ily}$ über $[0, 2\pi]^2$

Die Aussage $u \in H^m$ drücke man als Forderung an die Koeffizienten aus, insbesondere zeige man die Äquivalenz der Aussagen $u \in L^2$ und $c \in l_2$.
Man zeige, dass im Fall b) aus $u_{xx} + u_{yy} \in L^2$ auch $u_{xy} \in L^2$ folgt.

Aufgabe 21 : (7P)
Sei $\Omega = (0, 2\pi)^2$ ein Quadrat und $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von $-\Delta u = f$ mit $f \in L^2(\Omega)$. In Anlehnung an Aufgabe 20 schließe man zunächst $\Delta u \in L^2(\Omega)$ und dann mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung, dass alle 2. Ableitungen in $L^2(\Omega)$ sind, also u eine H^2-Funktion ist.

Aufgabe 22 : (6P)
Für die Behandlung der Poisson-Gleichung mit bilinearen Viereckelementen stelle man die Systemmatrix A_Q für das Quadrat auf. Man beachte, dass sich bei zyklischer Nummerierung aus Invarianzüberlegungen auf Elementebene die Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ ergibt.

Bekanntlich bestimmt man aus der Steifigkeitsmatrix auf Elementebene die gesamte Matrix. Bei regelmäßigen Gittern erhält man insbesondere den Differenzenstern

$$\mathbf{A} = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Kann man hier nun umgekehrt die oben geforderte Matrix aus dem Differenzenstern gewinnen?
Wegen der zyklischen Struktur sind die Vektoren $(1, i^k, (-1)^k, (-i)^k), k = 0, 1, 2, 3$ Eigenvektoren. Kann man auch ein System reeller Eigenvektoren angeben?

Abgabe: **am 08.12.2015**