

Numerik I

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Näherungen \mathbf{x}_k , $k = 1, 2, \dots$ für eine bei $\mathbf{x}_0 = (3, 2)^T$ liegende Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 10 \\ x_1 + x_2^2 - 7 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

einmal

- a) mittels des Newton-Verfahrens
- b) mittels des vereinfachten Newton-Verfahrens, d.h. im ersten Schritt ist eine LR-Zerlegung der Jacobi-Matrix zu bestimmen und diese ist dann im weiteren als Approximation der neuen Funktionalmatrix zu nehmen.
Es ist jeweils zu iterieren, bis $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\|_\infty \leq 10^{-3}$ ist. Benutzen Sie ferner in beiden Fällen die LR-Zerlegung der Jacobi-Matrix.
- c) Vergleichen Sie Aufwand und Genauigkeit der beiden Verfahren.

(4 P)

Aufgabe 2

Es sei p ein nicht explizit bekanntes Polynom fünften Grades. Berechnungen für sechs unterschiedliche Stellen führen zu Näherungswerten $\tilde{p}(x)$ für die entsprechenden exakten Werte $p(x)$. Es sei

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) &= p(x) && \text{für } x = 0, 98, 99, 101, 102 \\ \text{und } \tilde{p}(x) &= p(x) + \epsilon && \text{für } x = 100. \end{aligned}$$

Diese Angaben mögen nun als Stützwerte für das Interpolationspolynom $\tilde{p}(x)$ dienen. Berechnen Sie $\tilde{p}(2) - p(2)$. (4 P)

Aufgabe 3

Gegeben seien die Werte

$$\begin{aligned} x_0 &= 100 && \text{mit } p(x_0) = -1, \\ x_1 &= 101 && \text{mit } p(x_1) = 2 \\ \text{und } x_2 &= 102 && \text{mit } p(x_2) = -1. \end{aligned}$$

Gesucht ist das quadratische Interpolationspolynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ zu den gegebenen Werten.

- a) Schreiben Sie die resultierenden Gleichungen als lineares Gleichungssystem.
- b) Lösen Sie das entstandene Gleichungssystem durch Gauß-Elimination.
- c) Wiederholen Sie die Schritte aus a) und b) für das Interpolationspolynom in der Form $p(x) = b_0 + b_1(x - x_2) + b_2(x - x_2)^2$.

(4 P)

Aufgabe 4

Erstellen Sie eine MATLAB-function, die zu gegebenen Funktionswerten das Interpolationspolynom in der Newton-Darstellung berechnet: `function dividiff=interpoly(xi, fxi)`. Achtung, der Stoff dazu kommt erst am Freitag! Testen Sie den Code anhand des folgenden Beispiels:

Gegeben Sei die Rungefunktion $f(x) = 1/(1+x^2)$ auf $[-5, 5]$. Berechnen Sie das Interpolationspolynom bezüglich äquidistanter Knoten (einmal 9 und einmal 21) und bezüglich 9 selbstgewählter Knoten. Plotten Sie die Funktion, das Interpolationspolynom, sowie die Differenzfunktion $f - p_n$, zum Beispiel durch Auswerten an 100 Stellen. Berechnen Sie ferner entsprechend gut die maximale Abweichung, also $\|f - p_n\|_\infty$. Versuchen Sie, die maximale Abweichung mittels der selbstgewählten Knoten so weit wie möglich zu drücken. 0.15 sollten Sie schaffen, wer auf 0.11 runterkommt, ist richtig gut.

Abzugeben sind ihre Dateien (wie immer gut kommentiert) per email, schriftlich ein Ausdruck ihrer Dateien und ihre Interpretation der Ergebnisse. (8 P)

Abgabe: Dienstag, 11.7.2004 in der Vorlesung