Fachbereich Mathematik und Informatik **SoSe 2004**
Prof. Dr. Andreas Meister
Fil. mag. Philipp Birken

Numerik I

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1
Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch und positiv definit. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \|.\|_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} := \|\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x}\|_2 \end{aligned}$$

stellt eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ dar.

Bemerkung: Sei $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die unitäre Matrix mit

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad d_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

dann gilt

$$\boldsymbol{D}^{1/2} = \operatorname{diag}\left\{\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}\right\}$$

und

$$\boldsymbol{A}^{1/2} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{U}^*.$$

(4 P)

Aufgabe 2
Eine Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt streng diagonal dominant, wenn

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |a_{ki}|, \quad k = 1, \dots, n$$

gilt.

Zeigen Sie:

Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ streng diagonal dominant, dann ist $\boldsymbol{A}[k]$ regulär für $k = 1, \dots, n$,
wobei $\boldsymbol{A}[k] := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$, $k = 1, \dots, n$. (4 P)

Aufgabe 3

a) Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix.

   Zeigen Sie:

   (i) $a_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, n$

   (ii) $\max\limits_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |a_{ii}|$

b) Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, streng diagonal dominante Matrix mit positiven Diagonalelementen, dann ist $\boldsymbol{A}$ positiv definit. (4 P)

Aufgabe 4

a) Susanne und Frank machen ein Physik-Experiment. Sie versuchen die Parameter x_1 und x_2 zu bestimmen und kennen die funktionale Beziehung

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die beiden führen einen Versuch durch und messen: $a = 1$. Als erfahrene Experimentatoren wissen Sie, daßin Experimenten immer Fehler auftauchen, haben jedoch keine Zeit, den Versuch zu wiederholen. Überhaupt ist gleich Vorlesung, sie müssen den Zettel abgeben und verzichten auch auf eine Fehlerrechnung.

Schätzen Sie für Susanne und Frank in Abhängigkeit vom unbekannten Messfehler ϵ den relativen Fehler $\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ in der ∞-Norm nach oben ab.

b) Berechnen Sie die Kondition der 3×3 Hilbert Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

in der ∞- und der 1-Norm. Wenn Sie wollen, überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Matlab: Der Befehl cond(A,1) bzw. cond(A,inf) berechnet - ach, da kommen Sie schon selber drauf. Eine $n \times n$ Hilbert-Matrix wird mittels hilb(n) erzeugt. (4 P)

Abgabe: Montag, 10.5.2003 vor der Vorlesung in 2403