Fachbereich Mathematik und Informatik **SoSe 2006**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dr. Philipp Birken

Numerik I

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1
Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie

$$\boldsymbol{A}^j \to \boldsymbol{0}, \quad j \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(\boldsymbol{A}) < 1$$

(4 P)

Aufgabe 2
Leiten Sie unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ein iteratives Verfahren her, dass für jeden Startwert $x \in (0,1)$ gegen den in $(0,1)$ liegenden Fixpunkt der Funktion $f(x) = -\ln x$ konvergiert. (4 P)

Aufgabe 3
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{8}\cos\frac{\pi}{4} & \frac{7}{8}\sin\frac{\pi}{4} \\ -\frac{7}{8}\sin\frac{\pi}{4} & 1 - \frac{7}{8}\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß das lineare Iterationsverfahren

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

für beliebigen Starvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $\boldsymbol{x} = (0,0)^T$ konvergiert, obwohl eine Matrixnorm mit

$$\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\| > 1$$

existiert. Geben Sie ein Beispiel für eine solche. Veranschaulichen Sie beide Sachverhalte zudem graphisch. (4 P)

Aufgabe 4
Dies ist eine Programmieraufgabe. Für die Lösung der kompletten Aufgabe sind zwei Wochen Zeit gegeben.

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ \tfrac{1}{16}x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösungen verdeutlicht. Bestimmen Sie für den 1. Quadranten einen *guten* ganzzahligen Startwert (x_0, y_0).

b) Gesucht ist nun die Lösung im ersten Quadranten. Geben Sie eine geeignete Fixpunktgleichung an und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach nach.

c) Wieviele Schritte sind (ausgehend von dem in a) gewählten Startwert) höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\epsilon = 10^{-4}$ zu erzielen. Verwenden Sie die a-priori-Fehlerabschätzung.

d) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, welches das Fixpunktverfahren für die betrachtete Fixpunktgleichung durchführt. Das Programm soll die Iteration abbrechen, wenn die a-posteriori-Fehlerschätzung einen Fehler von weniger als $\epsilon = 10^{-4}$ ergibt. Lesen Sie hierzu den Schnellkurs in Matlab bis Seite 17 weiter. Schicken Sie wie beim letzten mal das entsprechende .m-File an numerikabgabe@mathematik.uni-kassel.de.

e) Geben Sie die anderen Lösungen mit derselben Genauigkeit (ohne weitere Rechnung) an.

(8 P)

Abgabe: **Dienstag, 16.5.2004 vor der Vorlesung**