Fachbereich Mathematik und Informatik **SoSe 2006**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dr. Philipp Birken

Numerik I

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1
Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soll mit dem Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren gelöst werden. Wieviele Iterationen sind jeweils ungefähr erforderlich, um den Fehler $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2$ um den Faktor 10^{-6} zu reduzieren? (4 P)

Aufgabe 2

Definition: Eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt M-Matrix, falls

a) $a_{ii} > 0\,,\ i = 1, \ldots, n$
b) $a_{ij} \le 0\,,\ i,j = 1, \ldots, n\,,\ i \neq j$
c) $\boldsymbol{A}$ ist regulär mit $\boldsymbol{A}^{-1} \ge 0$

gilt.

(1) Geben Sie ein Beispiel für eine M-Matrix an, die keine Diagonalmatrix darstellt und die nicht die Matrix aus Aufgabe 3 ist.

(2) Zeigen Sie für eine M-Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
   a) Sei $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}'$, dann folgt aus $\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{b}'$ auch $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}'$.
   b) Für die zu $\boldsymbol{A}$ gehörige Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens gilt

$$\boldsymbol{M}_J \ \ge\ 0$$

und

$$\rho(\boldsymbol{M}_J) \ <\ 1.$$

Bemerkungen:
Die Relationen $\boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{0}$ respektive $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ sind stets komponentenweise zu verstehen. Nutzen Sie die Aussage, daß für $\boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{0}$ stets zu $\lambda = \rho(\boldsymbol{A})$ ein Eigenvektor $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ gehört. (4 P)

Aufgabe 3
Gegeben seien die Funktion $f(x) = sin(2\pi x)$ und die eindimensionale Poisson-Gleichung mit sogenannten Dirichlet-Randbedingungen:

$$-\Delta u(x) = -u_{xx}(x) = f(x),\ x \in [0,1],$$

$$u(0) = u_L = 1, \ u(1) = u_R = 1.$$

Diese Gleichung soll numerisch näherungsweise gelöst werden. Vierteln Sie dazu zunächst das Intervall $[0,1]$ in Teilintervalle der Länge $h = 1/4$. Die Lösung $u(x)$ soll an den Stellen, wo zwei Teilintervalle aufeinandertreffen (den sogenannten Gitterpunkten) approximiert werden. Nummerieren Sie die Gitterpunkte durch von Null bis Vier. Die Approximationen nennen wir $u_i \approx u(x_i)$. Dann wird die zweite Ableitung mittels eines Differenzenquotienten angenähert:

$$u_{xx}(x_i) \simeq \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}.$$

a) Stellen Sie für die Unbekannten u_i ein lineares Gleichungssystem auf.

b) Beweisen Sie: die zum Gleichungssystem gehörige Matrix ist eine M-Matrix.

c) Beweisen Sie: die Matrix ist symmetrisch und positiv definit.

Abgabe: Dienstag, 23.5.2004 vor der Vorlesung