Fachbereich Mathematik und Informatik **SoSe 2006**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dr. Philipp Birken

Numerik I

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1
Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix, $\mathbf{b}$ eine rechte Seite und $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_{n-1}$ vorgegebene, bezüglich $\mathbf{A}$ paarweise konjugierte Richtungen. Man finde einen Vektor $\mathbf{x}_0$, so dass das Verfahren der konjugierten Richtungen zur Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit Startwert $\mathbf{x}_0$ dieselben Vektoren $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0$ (aber i.A. nicht die Lösung des Gleichungssystems) für $j = 1, 2, ..., n-1$ liefert. Was ist $\mathbf{x}_n$? (4 P)

Aufgabe 2
Gegeben sei das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.78 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

a) Wie lautet die exakte Lösung?

b) Berechnen Sie für die beiden Näherungslösungen $\boldsymbol{u} = (0.999, -1.001)^T$ und $\boldsymbol{v} = (0.341, -0.087)^T$ die Residuen $r(\boldsymbol{u})$ und $r(\boldsymbol{v})$. Hat die „genauere" Lösung $\boldsymbol{u}$ das kleinere Residuum? Erklären Sie die Diskrepanz durch Betrachtung der Residuenfunktion r. (Das Residuum $r(\boldsymbol{z})$ einer Näherungslösung $\boldsymbol{z}$ der Gleichung $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist durch $r(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{z}\|_2$ definiert.)

(4 P)

Aufgabe 3
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch und positiv definit, $b \in \mathbb{C}^n$ und

$$F(x) := \frac{1}{2}(Ax, x)_2 - \operatorname{Re}\,((b, x)_2)\,.$$

Zeigen Sie:

a) $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, d.h. F ist reellwertig.

b) $\operatorname{Re}\,((b, x^*)_2) = (b, x^*)_2$ für $x^* = A^{-1}b$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}\left\{(A(x - x^*), x - x^*)_2 - (b, x^*)_2\right\}$ für $x^* = A^{-1}b$.

d) $F(x) = F(\tilde{x}) + \operatorname{Re}\,((A\tilde{x} - b, x - \tilde{x})_2) + \frac{1}{2}\,(A(x - \tilde{x}), x - \tilde{x})_2$ für alle $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$.

e) Seien $x \in \mathbb{C}^n$, $p \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ gegeben, dann hat das Minimum der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto F(x + \lambda p) \end{aligned}$$

die Darstellung

$$\lambda \;=\; \frac{\mathrm{Re}\,((r,p)_2)}{(Ap,p)_2}$$

mit

$$r \;=\; b - Ax.$$

(4 P)

Abgabe: **Dienstag, 20.6.2004 vor der Vorlesung**