

Übungsblatt 01

Abgabe: ????

Aufgabe 1: Charakteristische Funktionen und Mengenoperationen

Sei X eine nichtleere Menge. Für $A, B \subset X$ sind die symmetrische Differenz $A \triangle B$ und die Charakteristische Funktion χ_A definiert durch

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in X \setminus A \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ und dass folgende Rechenregeln gelten:

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \quad \chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B}, \quad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A,$$

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B), \quad \chi_{A \triangle B} = |\chi_A - \chi_B|$$

Hierbei bezeichnet A^c das Komplement von A .

Aufgabe 2: Erinnerung an das Riemann-Integral

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall ($a < b$).

- (a) Zeigen Sie, dass folgendes *monotones Konvergenzprinzip* gültig ist:

Seien $f_k, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen mit der Eigenschaft $f_k(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k(x) dx = \int_I f(x) dx$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unter obigen Voraussetzungen bereits gleichmäßig gegen f konvergiert und benutzen Sie entsprechende Konvergenzsätze aus der Vorlesung Analysis 1/2.

- (b) Beachten Sie, dass in obigem Konvergenzprinzip vorausgesetzt wurde, dass die Grenzfunktion f stetig ist. Überlegen Sie sich ein Gegenbeispiel zu folgender Aussage:

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf I mit $f_k(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist f stetig.

- (c) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu folgender Aussage:

Sei $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sup_{x \in [a, b], k \in \mathbb{N}} f_k(x) \leq C < \infty$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen und es gelte $f_k(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Finden Sie sämtliche Tippfehler auf diesem Blatt und teilen Sie uns diese mit!

Viel Erfolg!