Klausur zu Höhere Mathematik I Maschinenbau SoSe 2021

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11.5 Punkte)

a) Ergänzen Sie im Folgenden die Symbole =, $\implies$ oder $\iff$. Verwenden Sie falls möglich $\iff$ statt $\implies$.

Im Folgenden sei $x \in \mathbb{R}$.

i) $x < 0 \ \boxed{\iff} \ -x > 0$

ii) $x \ \boxed{=} \ -3 \implies x^2 \ \boxed{=} \ 9$

iii) $2 + 2 \ \boxed{=} \ \sqrt{16}$

iv) $x^3 = -8 \ \boxed{\iff} \ x \ \boxed{=} \ -2$

b) Entscheiden Sie jeweils rechnerisch, ob der Punkt $P = (1, 1, 1)$ in der Ebene

$$E\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

oder auf der Geraden

$$g\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

liegt.

Ergebnis:
Der Punkt P liegt in der Ebene E.
P liegt nicht auf der Geraden g.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$ ist ein abgeschlossenes Intervall.

■ Wahr ☐ Falsch Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

☐ Wahr ■ Falsch Für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ ist das Spatprodukt $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

2. (12.5 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sqrt[n]{3}\frac{(n+2)!}{n^2 n!}$$

konvergiert. Falls ein Grenzwert existiert, geben Sie diesen an. Falls kein Grenzwert existiert, geben Sie an, ob die Folge bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert oder ob sie unbestimmt divergent ist.

Ergebnis:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n}{3^n}.$$

i) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist.

ii) Entscheiden Sie, ob Infimum und Minimum von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Ergebnis:
$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$. Ein Minimum existiert nicht.

c) Untersuchen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^k}{3^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}}\right)$$

konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Ergebnis:
Die Reihe konvergiert mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^k}{3^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}}\right) = 1.$$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ konvergiert gegen -1 und $+1$.

☐ Wahr ■ Falsch Jede konvergente Folge ist streng monoton.

■ Wahr ☐ Falsch Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

3. (16 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{\tan(x)}}{(1+\ln(x)^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ von f.

Ergebnis:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Bestimmen Sie zu der gebrochenrationalen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4},$$

die Asymptote g.

Ergebnis:
Die Asymptote ist $g(x) = 0$.

c) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^4)$.

i) Begründen Sie, ob f gerade ist oder nicht.

Ergebnis:
f ist gerade.

ii) Bestimmen Sie die größtmöglichen Intervalle, auf denen f monoton fallend oder monoton wachsend ist.

Ergebnis:

f monoton fallend für $x \leq 0$ $(x < 0)$
f monoton wachsend für $x \geq 0$ $(x > 0)$

iii) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

Ergebnis:
Die einzige Nullstelle von f ist $x = 0$.

iv) Ist f injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ergebnis:
f ist nicht injektiv.

v) Bestimmen Sie den Wertebereich $f(\mathbb{R})$ rechnerisch. Begründen Sie, ob f surjektiv ist oder nicht.

Ergebnis:

$$f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$$

d) Zeigen Sie
$$(\sin(x) - \cos(x))^2 = 1 - \sin(2x).$$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = x$.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt $\frac{d}{dx}e^x = xe^{x-1}$.

4. (8.5 Punkte)

   a) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$,

   $$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x(e^x + e^{-x})}.$$

      i) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$, ohne die Regeln von l'Hospital zu verwenden.

      Ergebnis:
      $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

      ii) Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)$.

      Ergebnis:
      $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

      iii) Ist die Funktion

      $$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x(e^x+e^{-x})}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

      stetig?

      Ergebnis:
      $\tilde{f}$ ist stetig.

   b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ■ Wahr ☐ Falsch Jedes $x \in [a,b]$ ist ein Häufungspunkt von (a,b).

   ■ Wahr ☐ Falsch Für stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

   ☐ Wahr ■ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2 + e^x)$ ist nicht stetig.

5. (12 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x) + 1}$.

i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2-ten Grades von f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Ergebnis:
$T_2(x; 0) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$

ii) Berechnen und klassifizieren Sie die globalen Extremalstellen von f auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ergebnis:
Bei $x = \pm\frac{\pi}{2}$ liegen globale Maxima.
Bei $x = 0$ liegt das globale Minimum.

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Ist $x_0 \in [a, b]$ eine globale Maximalstelle der differenzierbaren Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt stets $f'(x_0) = 0$.

☐ Wahr ■ Falsch Jede stetige Funktion ist auch differenzierbar.

6. (9.5 Punkte)

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x^2 \cos(x)\, dx$$

mithilfe partieller Integration.

Ergebnis:

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + c.$$

b) Schreiben Sie den Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x+1)^{2n}$$

ohne Summenzeichen, indem Sie die Reihendarstellung

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

des Cosinus verwenden.

Ergebnis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x+1)^{2n} = 1 - \cos(2x+1)$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Für eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x).$$

■ Wahr ☐ Falsch Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ ist.

☐ Wahr ■ Falsch Die Exponentialreihe ist keine Taylor-Reihe.