Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW WiSe 2021/22

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

   a) Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervall. Tragen Sie das Endergebnis gleich hier ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

   $$[3,\infty) \cup (0,10] = \underline{(0,\infty)}$$

   $$\{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| < 5\} = \underline{(-6,4)}$$

   b) Gegeben seien der Punkt $P = (1,0,1)$, die Gerade

   $$g\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

   sowie die Ebene

   $$E\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

   i) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene E steht.

   ii) Entscheiden Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.

   iii) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

   Lösung:

   i) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$

   ii) Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g.

   iii) Der Abstand des Punktes P von der Geraden g beträgt $d = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ■ Falsch Gilt für drei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ die Eigenschaft $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = 0$, so ist $\boldsymbol{x}$ senkrecht zu $\boldsymbol{y}$ und senkrecht zu $\boldsymbol{z}$.

   ☐ Wahr ■ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x-1)^4 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

2. (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(3+n)(n-1)}{n^2-10}\sqrt[n]{5}$$

konvergiert. Falls ein Grenzwert existiert, geben Sie diesen an. Falls kein Grenzwert existiert, geben Sie an, ob die Folge bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert oder ob sie unbestimmt divergent ist.

Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

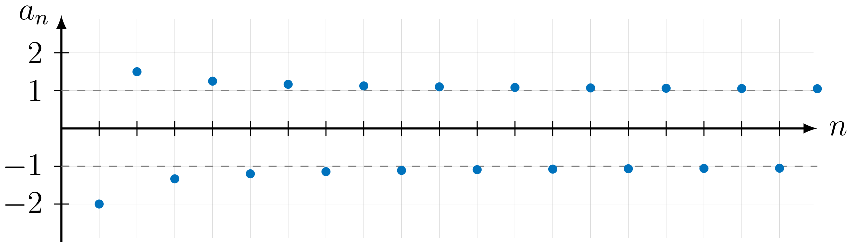
i) Berechnen Sie die Folgenglieder $a_1,\dots,a_5$ und begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend ist.

Lösung: $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = -\frac{4}{3}$, $a_4 = \frac{5}{4}$, $a_5 = -\frac{6}{5}$.

Wegen $a_1 < a_2$ und $a_2 > a_3$ ist die Folge nicht monoton

ii) Skizzieren Sie die Folge, um das Verhalten für $n\to\infty$ zu verdeutlichen. Entscheiden Sie, ob Infimum und Minimum von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Lösung:



$\min\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -2$.

c) Vereinfachen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3(k-1)!}{k!}$$

und entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert. Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Lösung: Die Reihe ist divergent, es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3(k-1)!}{k!} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{10n}$ ist konvergent.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt

$$\sum_{k=12}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\,.$$

3. (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f: I \to f(I)$ mit $I = (-1, 1)$,

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}\,.$$

a) Weisen Sie nach, dass f streng monoton wachsend ist.

Lösung: $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x)$$

Lösung: $\lim\limits_{x \searrow -1} \dfrac{x}{1-x^2} = -\infty, \ \lim\limits_{x \nearrow 1} \dfrac{x}{1-x^2} = \infty.$

c) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Lösung: $f(I) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(x) = \ln(x^2+1)\cos(x)$.

Lösung: $u'(x) = \frac{2x\cos(x)}{1+x^2} - \ln(x^2+1)\sin(x)$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = 0$.

■ Wahr ☐ Falsch Die Verkettung $g \circ h$ der Funktionen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x^2+1}$ und $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x - 1$ hat die Funktionsvorschrift

$$(g \circ h)(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1}\,.$$

4. (12 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}\,.$$

i) Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion p und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Minimal- oder Maximalstellen handelt. Berechnen Sie die entsprechenden lokalen Minima bzw. Maxima.

ii) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von p für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

iii) Entscheiden Sie, ob p globale Extremalstellen besitzt.

Lösung:

i) Die einzige lokale Minimalstelle ist $x = 2$, lokales Minimum $p(2) = -3$.

Die einzige lokale Maximalstelle ist $x = -1$, lokales Maximum $p(-1) = \frac{3}{2}$.

ii) $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$

iii) p besitzt keine globalen Extremalstellen.

b) Gegeben ist die Funktion $f : (-1, 1)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\,$,

$$f(x) = \frac{x^2}{(\sin(x))^2}\,.$$

i) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} f(x).$$

Lösung: Mit de l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

ii) Entscheiden Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzbar ist, oder eine Polstelle besitzt. Geben Sie im Fall einer Polstelle an, ob es sich um eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel handelt.

Lösung: f ist an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzbar.

iii) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x \ln(|x| + 1)$ ist ungerade.

☐ Wahr ■ Falsch Die Funktion $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ h(x) = e^{\cos(x)} \tan(x)$ besitzt keine Nullstelle.

5. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2\sqrt{x}}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

Lösung: $T_2(x;1) = e^2 + e^2(x-1) + \frac{1}{4}e^2(x-1)^2$

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k}{k^2}(x-2)^k .$$

Lösung: $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Taylor-Reihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} .$$

■ Wahr ☐ Falsch Ergibt sich für den Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ der Wert $r = 0$, so divergiert diese Potenzreihe für alle $x \neq 0$.

6. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösung:

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx = \frac{1}{5}\ln(|x-3|) - \frac{1}{5}\ln(|x+2|) + c$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,dx$$

mittels zweifacher partieller Integration. Geben Sie das Ergebnis ohne Sinus- und Cosinus-Ausdrücke an.

Lösung:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,dx = \frac{1}{2}(1+e^{\pi})$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty\,.$$

☐ Wahr ■ Falsch Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0\,.$$