

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik I
BNUW
WiSe 2021/22

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

- a) Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervall. Tragen Sie das Endergebnis gleich hier ein.
Eine Begründung ist nicht erforderlich.

$$[3, \infty) \cup (0, 10] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 5\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b) Gegeben seien der Punkt $P = (1, 0, 1)$, die Gerade

$$g: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

sowie die Ebene

$$E: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- i) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene E steht.
ii) Entscheiden Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.
iii) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g .
c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Gilt für drei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ die Eigenschaft $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = 0$, so ist $\mathbf{x}$ senkrecht zu $\mathbf{y}$ und senkrecht zu $\mathbf{z}$.

☐ Wahr ☐ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x - 1)^4 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

2. (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(3+n)(n-1)}{n^2-10} \sqrt[3]{5}$$

konvergiert. Falls ein Grenzwert existiert, geben Sie diesen an. Falls kein Grenzwert existiert, geben Sie an, ob die Folge bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert oder ob sie unbestimmt divergent ist.

b) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

i) Berechnen Sie die Folgenglieder $a_1, \dots, a_5$ und begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend ist.

ii) Skizzieren Sie die Folge, um das Verhalten für $n \rightarrow \infty$ zu verdeutlichen. Entscheiden Sie, ob Infimum und Minimum von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existieren, und geben Sie diese gegebenenfalls an.

c) Vereinfachen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(k-1)!}{k!}$$

und entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert. Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{10n}$ ist konvergent.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt

$$\sum_{k=12}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

3. (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f: I \rightarrow f(I)$ mit $I = (-1, 1)$,

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

a) Weisen Sie nach, dass f streng monoton wachsend ist.

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x)$$

c) Geben Sie den Wertebereich von f an.

d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \ln(x^2 + 1) \cos(x)$.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = 0$.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Verkettung $g \circ h$ der Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x - 1$ hat die Funktionsvorschrift

$$(g \circ h)(x) = \sqrt{(x - 1)^2 + 1}.$$

4. (12 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}.$$

i) Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion p und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Minimal- oder Maximalstellen handelt. Berechnen Sie die entsprechenden lokalen Minima bzw. Maxima.

ii) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von p für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

iii) Entscheiden Sie, ob p globale Extremalstellen besitzt.

b) Gegeben ist die Funktion $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2}{(\sin(x))^2}.$$

i) Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

ii) Entscheiden Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzbar ist, oder eine Polstelle besitzt. Geben Sie im Fall einer Polstelle an, ob es sich um eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel handelt.

iii) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \ln(|x| + 1)$ ist ungerade.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\cos(x)} \tan(x)$ besitzt keine Nullstelle.

5. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2\sqrt{x}}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k}{k^2} (x - 2)^k.$$

Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Taylor-Reihe der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

☐ Wahr ☐ Falsch Ergibt sich für den Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ der Wert $r = 0$, so divergiert diese Potenzreihe für alle $x \neq 0$.

6. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+2)} dx$$

mittels Partialbruchzerlegung.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\pi} e^x \sin(x) dx$$

mittels zweifacher partieller Integration. Geben Sie das Ergebnis ohne Sinus- und Cosinus-Ausdrücke an.

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty.$$

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_0^1 f(x) dx \geq 0.$$