Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Klausur zu Höhere Mathematik I Maschinenbau WiSe 2021/22

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

   a) Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervall. Tragen Sie das Endergebnis gleich hier ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

   $[3, \infty) \cup (0, 10] =$ ____________

   $\{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| < 5\} =$ ____________

   b) Gegeben seien der Punkt $P = (1, 0, 1)$, die Gerade

   $$g\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

   sowie die Ebene

   $$E\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

   i) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene E steht.

   ii) Entscheiden Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.

   iii) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Gilt für drei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ die Eigenschaft $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = 0$, so ist $\boldsymbol{x}$ senkrecht zu $\boldsymbol{y}$ und senkrecht zu $\boldsymbol{z}$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x-1)^4 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

2. (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(3+n)(n-1)}{n^2-10}\sqrt[n]{5}$$

konvergiert. Falls ein Grenzwert existiert, geben Sie diesen an. Falls kein Grenzwert existiert, geben Sie an, ob die Folge bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert oder ob sie unbestimmt divergent ist.

b) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

i) Berechnen Sie die Folgenglieder $a_1, \ldots, a_5$ und begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend ist.

ii) Skizzieren Sie die Folge, um das Verhalten für $n \to \infty$ zu verdeutlichen. Entscheiden Sie, ob Infimum und Minimum von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, und geben Sie diese gegebenenfalls an.

c) Vereinfachen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(k-1)!}{k!}$$

und entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert. Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{10n}$ ist konvergent.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt

$$\sum_{k=12}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\,.$$

3. (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f: I \to f(I)$ mit $I = (-1, 1)$,

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}\,.$$

a) Weisen Sie nach, dass f streng monoton wachsend ist.

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\searrow -1} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\nearrow 1} f(x)$$

c) Geben Sie den Wertebereich von f an.

d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(x) = \ln(x^2+1)\cos(x)$.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = 0$.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Verkettung $g \circ h$ der Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x^2+1}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x - 1$ hat die Funktionsvorschrift

$$(g \circ h)(x) = \sqrt{(x-1)^2+1}\,.$$

4. (12 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}\,.$$

i) Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion p und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Minimal- oder Maximalstellen handelt. Berechnen Sie die entsprechenden lokalen Minima bzw. Maxima.

ii) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von p für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

iii) Entscheiden Sie, ob p globale Extremalstellen besitzt.

b) Gegeben ist die Funktion $f : (-1, 1)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2}{(\sin(x))^2}\,.$$

i) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

ii) Entscheiden Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzbar ist, oder eine Polstelle besitzt. Geben Sie im Fall einer Polstelle an, ob es sich um eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel handelt.

iii) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x \ln(|x| + 1)$ ist ungerade.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ h(x) = e^{\cos(x)} \tan(x)$ besitzt keine Nullstelle.

5. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2\sqrt{x}}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k}{k^2}(x-2)^k\,.$$

Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Taylor-Reihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}\,.$$

☐ Wahr ☐ Falsch Ergibt sich für den Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ der Wert $r = 0$, so divergiert diese Potenzreihe für alle $x \neq 0$.

6. (10 Punkte)

   a) Berechnen Sie

   $$\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx$$

   mittels Partialbruchzerlegung.

   b) Berechnen Sie

   $$\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,dx$$

   mittels zweifacher partieller Integration. Geben Sie das Ergebnis ohne Sinus- und Cosinus-Ausdrücke an.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt

   $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty\,.$$

   ☐ Wahr ☐ Falsch Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

   $$\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0\,.$$