

**Klausur zu
Höhere Mathematik I
Maschinenbau
WiSe 2021/22**

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

- a) Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervall. Tragen Sie das Endergebnis gleich hier ein.
Eine Begründung ist nicht erforderlich.

$$[3, \infty) \cup (0, 10] = \underline{(0, \infty)}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 5\} = \underline{(-6, 4)}$$

- b) Gegeben seien der Punkt $P = (1, 0, 1)$, die Gerade

$$g: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

sowie die Ebene

$$E: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- i) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene E steht.
- ii) Entscheiden Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.
- iii) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g .

Lösung:

i) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$

ii) Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g .

iii) Der Abstand des Punktes P von der Geraden g beträgt $d = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

- c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Gilt für drei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ die Eigenschaft $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = 0$, so ist $\mathbf{x}$ senkrecht zu $\mathbf{y}$ und senkrecht zu $\mathbf{z}$.

☐ Wahr ☒ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x - 1)^4 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

2. (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(3+n)(n-1)}{n^2-10} \sqrt[n]{5}$$

konvergiert. Falls ein Grenzwert existiert, geben Sie diesen an. Falls kein Grenzwert existiert, geben Sie an, ob die Folge bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert oder ob sie unbestimmt divergent ist.

Lösung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

b) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

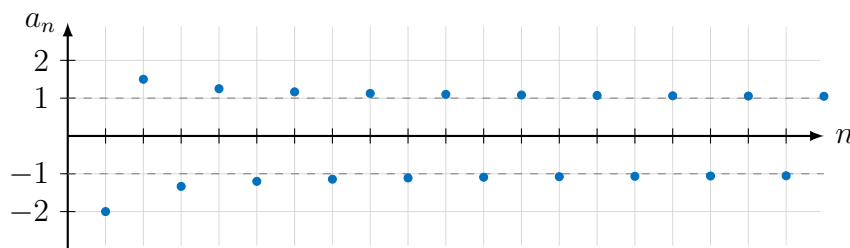
i) Berechnen Sie die Folgenglieder $a_1, \dots, a_5$ und begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend ist.

Lösung: $a_1 = -2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = -\frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}, a_5 = -\frac{6}{5}.$

Wegen $a_1 < a_2$ und $a_2 > a_3$ ist die Folge nicht monoton

ii) Skizzieren Sie die Folge, um das Verhalten für $n \rightarrow \infty$ zu verdeutlichen. Entscheiden Sie, ob Infimum und Minimum von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existieren, und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Lösung:



$\min_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -2.$

c) Vereinfachen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(k-1)!}{k!}$$

und entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert. Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Lösung: Die Reihe ist divergent, es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(k-1)!}{k!} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{10^n}$ ist konvergent.

☐ Wahr ☒ Falsch Es gilt

$$\sum_{k=12}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

3. (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f : I \rightarrow f(I)$ mit $I = (-1, 1)$,

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

- a) Weisen Sie nach, dass f streng monoton wachsend ist.

Lösung: $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0$

- b) Berechnen Sie

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x)$$

Lösung: $\lim_{x \searrow -1} \frac{x}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{x}{1-x^2} = \infty.$

- c) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Lösung: $f(I) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

- d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \ln(x^2 + 1) \cos(x)$.

Lösung: $u'(x) = \frac{2x \cos(x)}{1+x^2} - \ln(x^2 + 1) \sin(x)$

- e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = 0$.

☒ Wahr ☐ Falsch Die Verkettung $g \circ h$ der Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x - 1$ hat die Funktionsvorschrift

$$(g \circ h)(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1}.$$

4. (12 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}.$$

- i) Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion p und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Minimal- oder Maximalstellen handelt. Berechnen Sie die entsprechenden lokalen Minima bzw. Maxima.
- ii) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von p für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- iii) Entscheiden Sie, ob p globale Extremalstellen besitzt.

Lösung:

- i) Die einzige lokale Minimalstelle ist $x = 2$, lokales Minimum $p(2) = -3$.
Die einzige lokale Maximalstelle ist $x = -1$, lokales Maximum $p(-1) = \frac{3}{2}$.
- ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$
- iii) p besitzt keine globalen Extremalstellen.

b) Gegeben ist die Funktion $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2}{(\sin(x))^2}.$$

i) Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Lösung: Mit de l'Hospital: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

- ii) Entscheiden Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzbar ist, oder eine Polstelle besitzt. Geben Sie im Fall einer Polstelle an, ob es sich um eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel handelt.

Lösung: f ist an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzbar.

- iii) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \ln(|x| + 1)$ ist ungerade.

□ Wahr ■ Falsch Die Funktion $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\cos(x)} \tan(x)$ besitzt keine Nullstelle.

5. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2\sqrt{x}}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

Lösung: $T_2(x; 1) = e^2 + e^2(x - 1) + \frac{1}{4}e^2(x - 1)^2$

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k}{k^2} (x - 2)^k.$$

Lösung: $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Die Taylor-Reihe der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

■ Wahr □ Falsch Ergibt sich für den Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ der Wert $r = 0$, so divergiert diese Potenzreihe für alle $x \neq 0$.

6. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+2)} dx$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösung:

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+2)} dx = \frac{1}{5} \ln(|x-3|) - \frac{1}{5} \ln(|x+2|) + c$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^\pi e^x \sin(x) dx$$

mittels zweifacher partieller Integration. Geben Sie das Ergebnis ohne Sinus- und Cosinus-Ausdrücke an.

Lösung:

$$\int_0^\pi e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2}(1 + e^\pi)$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Es gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty.$$

☐ Wahr ☒ Falsch Ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_0^1 f(x) dx \geq 0.$$